Aszimptotikusan kúpszerű sokaságok

Szabó Áron

2021. szeptember 3.
MT80 Quo vadis matematikai fizika
Wigner Fizikai Kutatóközpont

MŰEGYETEM 1782

fizikus B. Sc.

UNIVERSITAS BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATA

fizikus M. Sc.

Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

matematikai fizika M. Sc.

Research Training Group 1670

MATHEMATICS INSPIRED BY STRING THEORY AND QUANTUM FIELD THEORY

matematika PhD.

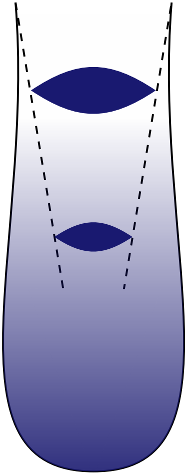
Bevezető

Globális analízis = geometriai problémák megoldása az analízis módszereivel

euklideszi tér ≈ kompakt terek
< nemkompakt terek

Kompromisszum: “egyetlen irányban megengedjük a nemkompaktságot”

Metrika: aszimptotikusan rásimul egy modellmetrikára, Ricci-laposság



Kúpok

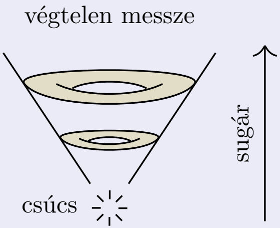
Kúpok tetszőleges keresztmetszettel

Definíció

Az (L, g_L) Riemann-sokaság fölötti kúp

$$\mathrm{Cone}(L, g_L) := ((0,\infty) \times L, dr \otimes dr + r^2 g_L).$$

Az L sokaság a kúp keresztmetszete.



- Ha $L = D^n$ körlap, akkor visszakapjuk a hagyományos értelemben vett kúpot;
- ha $L = S^n$ gömbfelszín, akkor egy pont híján az euklideszi teret kapjuk vissza (polárkoordináták).

A tangenciális operátor spektruma

A metrikához hasonló szimmetrikus 2-tenzormezőkön értelmezett Lichnerowicz-féle Laplace-operátor egy Ricci-lapos kúpon felbomlik:

$$\Delta_E^{g_{\mathrm{cone}}} = -\nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} \circ \nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} - \frac{\dim L}{r} \nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} + \frac{1}{r^2} \square_E,$$

ahol $\square_E$ az ún. tangenciális operátor (vö. gömbi Laplace).

Állítás (Sz. Á. 2021)

A tangenciális operátor spektruma elemi függvények segítségével, expliciten meghatározható a kúp keresztmetszetén adott geometriailag természetes Laplace-operátorok spektrumából. A sajátvektorok is expliciten meghatározhatók.

A tangenciális operátor spektruma

A metrikához hasonló szimmetrikus 2-tenzormezőkön értelmezett Lichnerowicz-féle Laplace-operátor egy Ricci-lapos kúpon felbomlik:

$$\Delta_E^{g_{\mathrm{cone}}} = -\nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} \circ \nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} - \frac{\dim L}{r} \nabla_{\partial_r}^{g_{\mathrm{cone}}} + \frac{1}{r^2} \Box_E,$$

ahol $\Box_E$ az ún. tangenciális operátor (vö. gömbi Laplace).

Állítás (Sz. Á. 2021)

A tangenciális operátor spektruma elemi függvények segítségével, expliciten meghatározható a kúp keresztmetszetén adott geometriailag természetes Laplace-operátorok spektrumából. A sajátvektorok is expliciten meghatározhatók.

Feltételezés

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy $-\left(\frac{\dim L - 1}{2}\right)^2 \notin \sigma(\Box_E)$.

Lecsengés a Lichnerowicz-féle Laplace-operátor magjában

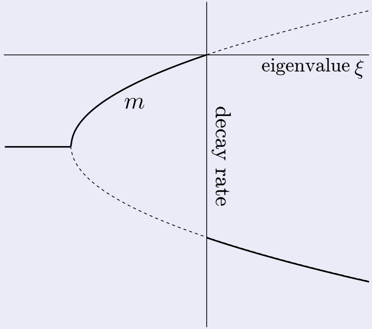
Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $h \in \Gamma^\infty\left(S^2T^*M\right)$ olyan tenzormező, amelyre

- $|h| \to 0$ a végtelenben
- $\Delta_E^{g_{\mathrm{cone}}} h = 0.$

Ekkor $h = O\left(r^{-\mu}\right)$, ahol

$$\mu := -\max\left\{m(\xi)\,|\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}. \quad (1)$$



Lecsengés a Lichnerowicz-féle Laplace-operátor magjában

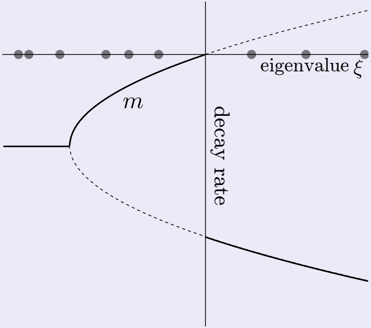
Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $h \in \Gamma^\infty\left(S^2T^*M\right)$ olyan tenzormező, amelyre

- $|h| \to 0$ a végtelenben
- $\Delta_E^{g_{\mathrm{cone}}} h = 0$.

Ekkor $h = O\left(r^{-\mu}\right)$, ahol

$$\mu := -\max\left\{m(\xi)\ |\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}. \quad (1)$$



Lecsengés a Lichnerowicz-féle Laplace-operátor magjában

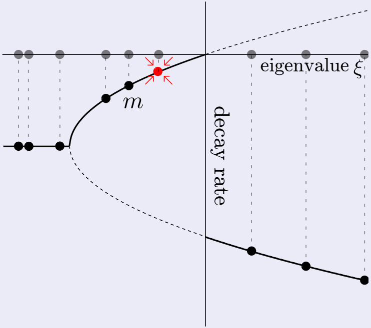
Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $h \in \Gamma^\infty\left(S^2 T^* M\right)$ olyan tenzormező, amelyre

- $|h| \to 0$ a végtelenben
- $\Delta_E^{g_{\text{cone}}} h = 0.$

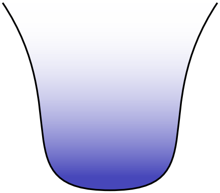
Ekkor $h = O\left(r^{-\mu}\right)$, ahol

$$\mu := -\max\left\{m(\xi)\,|\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}. \quad (1)$$



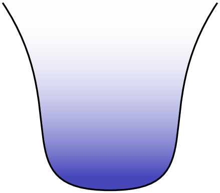
Aszimptotikusan kúpszerű sokaságok

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



aszimptotikusan
kúpszerű

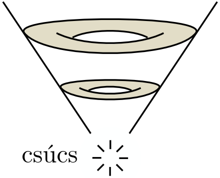
Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?

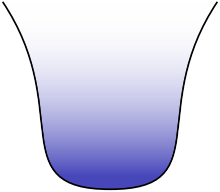


aszimptotikusan
kúpszerű

Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0,R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\boldsymbol{\phi}_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\boldsymbol{\tau}-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

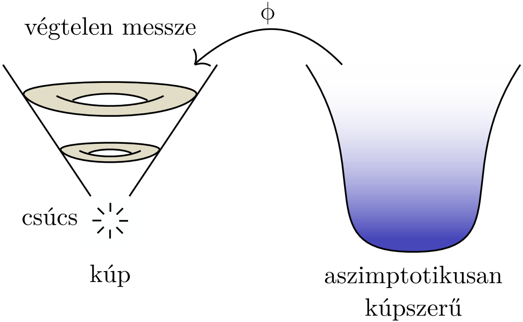
Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?





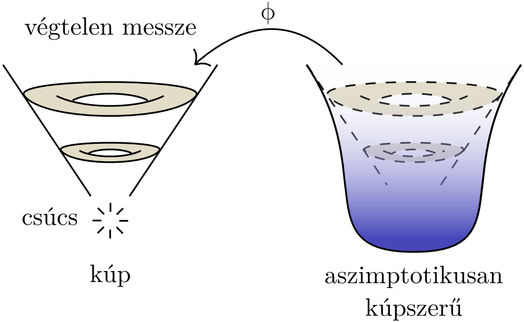
Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\boldsymbol{\phi}_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\boldsymbol{\tau}-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



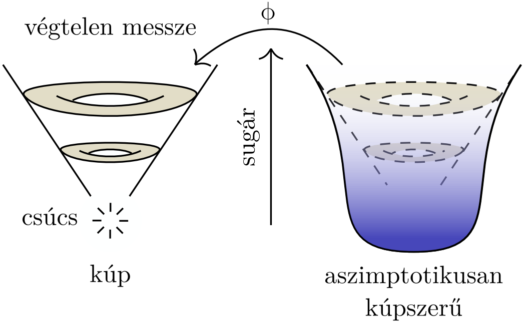
Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\boldsymbol{\phi}_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\boldsymbol{\tau}-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



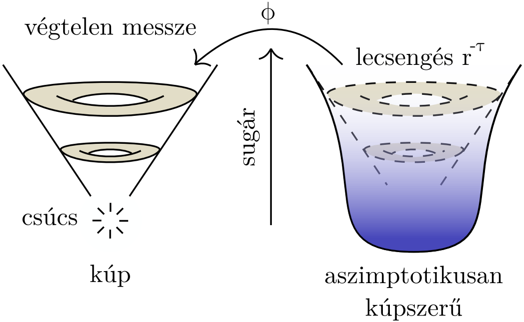
Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\boldsymbol{\phi}_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\boldsymbol{\tau}-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



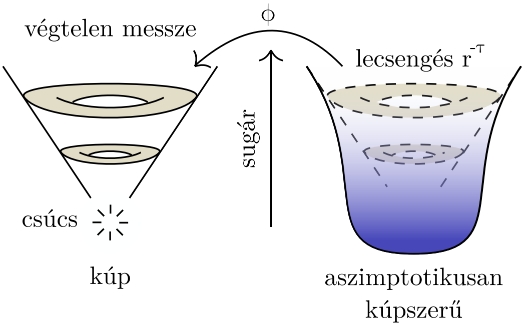
Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\boldsymbol{\phi}_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\boldsymbol{\tau}-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\phi_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\tau-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Mik az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok?



Létezik egy $\phi\colon M \setminus K \to \mathrm{Cone}(L, g_L) \setminus ((0, R] \times L)$ diffeomorfizmus úgy, hogy $|\nabla^{g_{\mathrm{cone}},k}(\phi_* g - g_{\mathrm{cone}})|_{g_{\mathrm{cone}}} = O\left(r^{-\tau-k}\right)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Cél

Módosítsuk a ϕ leképezést úgy, hogy τ nagyobb legyen.

Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaságok

- Eguchi és Hanson [EH78] 1978-ban a Yang–Mills-instanton gravitációs analogonja (gravitációs instanton) után kutatva felfedezett egy olyan Ricci-lapos teljes metrikát T^*S^2-n, amelyik egy kompakt részsokaságon kívül rásimul a $\mathrm{Cone}(S^3/\mathbb{Z}_2)$ kúpra.
- Kronheimer 1989-ben [Kro89] osztályozta a Ricci-lapos négydimenziós gravitációs instantonokat, ha az aszimptotikus kúp kereszmetszete egy gömb hányadosa és ha a a metrika hiperkähler.
- Időközben más aszimptotikájú példákat is találtak, pl. Stenzel-metrika T^*S^{n+1}-en, amely aszimptotikus $\mathrm{Cone}(SO(n+2)/SO(n))$-hoz [Ste93].
- Deruelle és Kröncke [DK20] adott egy eljárást a lecsengési ráta feljavítására új aszimptotikus térkép választásával, ha az aszimptotikus kúp $\mathrm{Cone}(S^m/\Gamma)$ alakú.

Ricci-laposság mint parciális differenciálegyenlet

Főleg azok a metrikák érdekesek, amelyek megoldják az Einstein-egyenletet, ezek közül is a Ricci-lapos kúpokra koncentrálunk

$$\mathrm{Ric}^g = 0 \qquad \text{avagy} \qquad R(g)_{\mu\nu} = 0.$$

Nemlineáris, nemelliptikus parciális differenciálegyenlet g-re.

Bianchi-mérték

Válasszunk egy $\bar{g}$ háttérmetrikát és legyen $V^\alpha = g^{\mu\nu}(\Gamma(g)^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma(\bar{g})^\alpha_{\mu\nu})$. Ha $V = 0$, akkor g teljesíti a $\bar{g}$-**Bianchi-feltételt**. Az

$$F\colon\ \mathrm{Met}\,(M) \to \Gamma\left(S^2T^*M\right), g \mapsto -2\,\mathrm{Ric}^g + \mathcal{L}_{V(g,\bar{g})}g$$

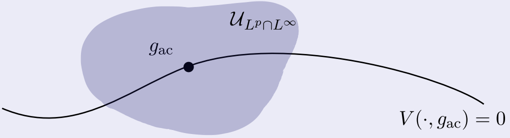
operátor másodrendű elliptikus kvázilieáris operátor, amelynek a $\bar{g}$-beli linearizáltja épp az Einstein-operátor [DeT83].

Állítás (Sz. Á. 2021)

Legyen $g_{\mathrm{ac}} \in \mathrm{Met}\,(M)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű metrika. Ekkor van egy megfelelő $(L^p \cap L^\infty(S^2T^*M, g_{\mathrm{ac}}))$-környezet, amelyben bármely g metrikára, amely kielégíti a $-2\,\mathrm{Ric}^g + \mathcal{L}_{V(g,g_{\mathrm{ac}})}g = 0$ egyenletet, igaz, hogy

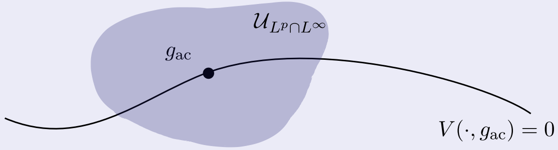
$$|\nabla^{g_{\mathrm{ac}},k}(g - g_{\mathrm{ac}})|_{g_{\mathrm{ac}}} = O\left(\rho^{-\mu-k}\right)$$

bármely $k \in \mathbb{N}$-ra.



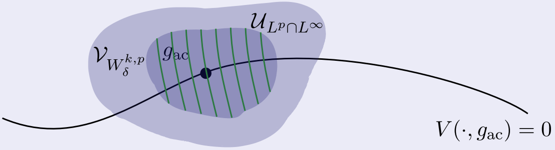
Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen g_{ac} Ricci-lapos, aszimptotikusan kúpszerű metrika M-en. Legyen $p \in (1, \infty)$ és $k > \frac{\dim M}{p} + 1$ valamint legyen $\delta \in (1 - \dim M, -1)$ nemkülönleges a vektormezők Hodge-Laplace-operátorára. Ekkor van g_{ac}-nek egy olyan ($W^{k,p}_{\delta}(S^2 T^* M, g_{\mathrm{ac}})$-)környezete, amelyben minden metrika egyértelműen visszahúzható a Bianchi-feltételt teljesítő metrikává.



Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen g_{ac} Ricci-lapos, aszimptotikusan kúpszerű metrika M-en. Legyen $p \in (1, \infty)$ és $k > \frac{\dim M}{p} + 1$ valamint legyen $\delta \in (1 - \dim M, -1)$ nemkülönleges a vektormezők Hodge-Laplace-operátorára. Ekkor van g_{ac}-nek egy olyan ($W_\delta^{k,p}(S^2T^*M, g_{\mathrm{ac}})$-)környezete, amelyben minden metrika egyértelműen visszahúzható a Bianchi-feltételt teljesítő metrikává.



Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\ |\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.

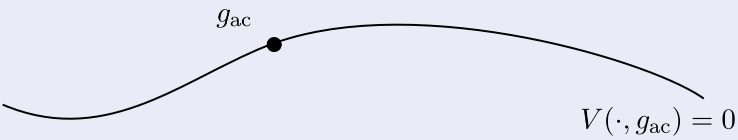
g_{ac}

Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\,|\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.

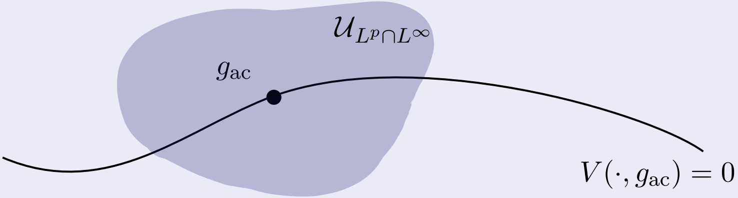


Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\,|\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.

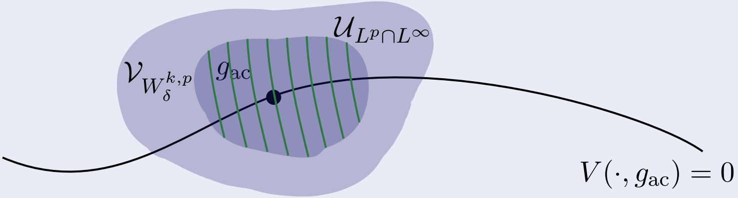


Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\,|\xi \in \sigma(\square_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.

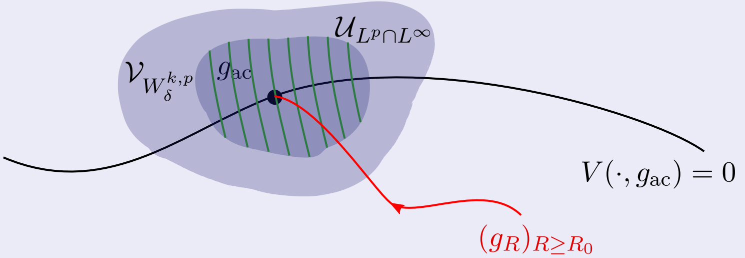


Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\ |\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.

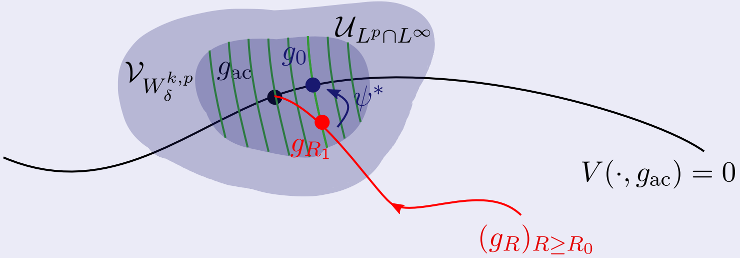


Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g_{\mathrm{ac}}) \in \mathrm{AC}\,(g_{\mathrm{cone}}, \tau, \phi)$ Ricci-lapos aszimptotikusan kúpszerű sokaság $(\mathrm{Cone}(L, g_L), g_{\mathrm{cone}})$ aszimptotikus kúppal és $\tau > 0$ lecsengési rátával. Ekkor van olyan $\tilde{\phi}$ aszimptotikus térkép, amellyel a lecsengési ráta

$$\mu = -\max\left\{m(\xi)\ |\xi \in \sigma(\Box_E)\right\}$$

a korábban megismert lecsengési ráta.



Összefoglalás

Az aszimptotikusan kúpszerű sokaságok definíciójában van egy választás (az aszimptotikus térkép), amit optimalizáltam.

- Potenciális alkalmazás: aszimptotikusan kúpszerű sokaságok stabilitása a Ricci-folyamban.
- Potenciális kiterjesztés: aszimptotikusan kúpszerű téridők? Perturbált kozmológia?

Könyvtár – örömmel veszem az újdonságokat

szofi.elte.hu/~szaboa/MatolcsiKonyvek

Köszönöm a figyelmet!
Boldog születésnapot, Tamás!

Irodalomjegyzék I

Shigetoshi Bando, Atsushi Kasue, and Hiraku Nakajima.
On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth.
Inventones Mathematicae, 97(2):313–349, 1989.

Dennis M. DeTurck.
Deforming metrics in the direction of their ricci tensors.
Journal of Differential Geometry, 18(1):157–162, 1983.
An improved version is available at
`https://www2.math.upenn.edu/~deturck/papers/ricdef.pdf`.

Alix Deruelle and Klaus Kröncke.
Stability of ALE Ricci-flat manifolds under Ricci flow.
The Journal of Geometric Analysis, Feb 2020.

Irodalomjegyzék II

Tohru Eguchi and Andrew J. Hanson.
Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity.
Physics Letters B, 74:249–251, 1978.

P. B. Kronheimer.
The construction of ale spaces as hyper-kähler quotients.
J. Differential Geometry, 29(3):665–683, 1989.

Tamás Matolcsi.
A Concept of Mathematical Physics: Models for Space-Time.
Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1984.

Matthew B. Stenzel.
Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space.
Manuscripta mathematica, 80:151–163, 1993.

Függelék

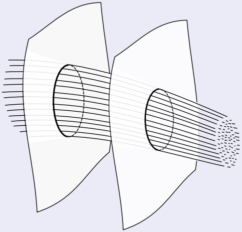
Definíció

Egy (M, g) sokaság kúp, ha van Euler-vektormező benne, azaz ha van egy Z vektormező, amely teljes és amelyre $\nabla^g_X Z = X$ minden X érintővektorra.

Állítás

Ha (M, g) kúp a fenti értelemben, akkor van olyan (L, g_L) sokaság, hogy $(M, g) = \mathrm{Cone}(L, g_L) = ((0, \infty) \times L, dr \otimes dr + r^2 g_L)$. Válaszható $L := \{p \in M \, ||Z|_p = 1\}$.

Bizonyításvázlat



A Z Euler-vektormező integrálgörbéi, valamint a $|Z|$ szintfelületei egymást jól kiegészítő disztibúciókat alkotnak. A szorzatszerkezet következik a [Mat84] megfigyelőkre vonatkozó részéből, a többi kis számolással adódik.

A $\square_E$ tangenciális operátor spektruma kúpon

Tétel (Sz. Á. 2021)

Legyen $(M, g) = \mathrm{Cone}(L, g_L)$ Ricci-lapos kúp. Ekkor

$$\begin{aligned}\sigma(\square_E) = \sigma(\Delta_B^{g_L}) \\ &\cup \{4m_\pm(\lambda) + \lambda + 2n + 2 \,|\lambda \in \sigma(\Delta_B^{g_L}), \lambda > 0\} \\ &\cup \left\{2m_\pm(\mu + 2 - \dim L) + \mu + 2 \,\middle|\mu \in \sigma(\Delta_H^{g_L}|_{D(L,g_L)})\right\} \\ &\cup \sigma(\Delta_E^{g_L}|_{TT(L,g_L)}) \\ &\cup \{2\dim L + 2\}\,.\end{aligned}$$