Szeparabilitási valószínűség

Andai Attila

[1]BME, Analízis Tanszék

2021. szeptember 3.

Közös munka Lovas Attilával[1].

Życzkowski 1998:

Is the world more classical or more quantum? Does it contain more quantum correlated (entangled) states than classically correlated ones?

Życzkowski 1998:

Is the world more classical or more quantum? Does it contain more quantum correlated (entangled) states than classically correlated ones?

Az *állapottér*

$$\mathcal{D}_{n,\mathbb{K}} = \left\{ D \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\middle|\, D = D^*,\ D > 0,\ \operatorname{Tr} D = 1 \right\} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

A $D \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}$ állapot *szeparált*, ha $D = \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \rho_t^{(1)} \otimes \rho_t^{(2)}$ alakban felírható, ahol $\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_r^{(1)} \in \mathcal{D}_{n,\mathbb{K}}$, $\rho_1^{(2)}, \dots, \rho_r^{(2)} \in \mathcal{D}_{m,\mathbb{K}}$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméterek, melyekre $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t = 1$ teljesül.

A $D \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}$ állapot *összefonódott*, ha nem szeparált.

Az állapottér felbontása

$$\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} = \mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cup \mathcal{D}^{\text{öf}}_{nm,\mathbb{K}} \qquad \mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cap \mathcal{D}^{\text{öf}}_{nm,\mathbb{K}} = \emptyset.$$

A $\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{R}^{(nm)^2-1}$ beágyazással élve az $\mathbb{R}^p$ téren jelölje V az euklidészi térfogatot.

A *szeparabilitási valószínűség:* $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) = \dfrac{V(\mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}})}{V(\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}})}$.

Życzkowski: $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) = ?$

Az állapottér felbontása

$$\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} = \mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cup \mathcal{D}^{\text{öf}}_{nm,\mathbb{K}} \qquad \mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cap \mathcal{D}^{\text{öf}}_{nm,\mathbb{K}} = \emptyset.$$

A $\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{R}^{(nm)^2-1}$ beágyazással élve az $\mathbb{R}^p$ téren jelölje V az euklidészi térfogatot.

A *szeparabilitási valószínűség:* $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) = \dfrac{V(\mathcal{D}^{\text{szep}}_{nm,\mathbb{K}})}{V(\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}})}$.

Życzkowski: $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) =?$

Legyen $\mathscr{P}_{\mathbb{K}} = p(2,2,\mathbb{K})$.

Az állapottér felbontása

$$\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} = \mathcal{D}^{\mathrm{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cup \mathcal{D}^{\mathrm{öf}}_{nm,\mathbb{K}} \qquad \mathcal{D}^{\mathrm{szep}}_{nm,\mathbb{K}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{öf}}_{nm,\mathbb{K}} = \emptyset.$$

A $\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{R}^{(nm)^2-1}$ beágyazással élve az $\mathbb{R}^p$ téren jelölje V az euklidészi térfogatot.

A *szeparabilitási valószínűség:* $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) = \dfrac{V(\mathcal{D}^{\mathrm{szep}}_{nm,\mathbb{K}})}{V(\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}})}$.

Życzkowski: $\mathscr{P}(n,m,\mathbb{K}) = ?$

Legyen $\mathscr{P}_{\mathbb{K}} = p(2,2,\mathbb{K})$.

Ekkor $\mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \frac{29}{64}$ és a sejtés, hogy $\mathscr{P}_{\mathbb{C}} = \frac{8}{33}$.

$\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$: A. Lovas, ~ J PHYS A-MATH THEOR. 50(29):295303, 2017.

Szeparabilitási feltétel ötlete

$$D = \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \rho_t^{(1)} \otimes \rho_t^{(2)} \ \Rightarrow \ \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \rho_t^{(1)} \otimes \left(\rho_t^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}.$$

Szeparabilitási feltétel ötlete

$$D = \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \rho_t^{(1)} \otimes \rho_t^{(2)} \;\Rightarrow\; \sum_{t=1}^{r} \lambda_t \rho_t^{(1)} \otimes \left(\rho_t^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}.$$

Qbit-qbit rendszer

Legyen $\rho(D_1, D_2, C) = \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$.

Ekkor $\rho(D_1, D_2, C) \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}} \;\Rightarrow\; \rho(D_1, D_2, C^*) \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$.

Szeparabilitási feltétel ötlete

$$D=\sum_{t=1}^{r}\lambda_t\rho_t^{(1)}\otimes\rho_t^{(2)} \;\Rightarrow\; \sum_{t=1}^{r}\lambda_t\rho_t^{(1)}\otimes\left(\rho_t^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}_{nm,\mathbb{K}}.$$

Qbit-qbit rendszer

Legyen $\rho(D_1,D_2,C)=\begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix}$.

Ekkor $\rho(D_1,D_2,C)\in\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}} \;\Rightarrow\; \rho(D_1,D_2,C^*)\in\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$.

Peres–Horodecki-kritérium.

Qbit-qbit rendszer esetén ha $\rho(D_1,D_2,C)\in\mathcal{D}_{2x2,\mathbb{K}}$, akkor

$$\rho(D_1,D_2,C)\in\mathcal{D}_{2x2,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}} \;\Leftrightarrow\; \rho(D_1,D_2,C^*)\in\mathcal{D}_{2x2,\mathbb{K}}.$$

Parciális nyom

$$\operatorname{Tr}_2 \rho(D_1, D_2, C) = \operatorname{Tr}_2 \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} = D_1 + D_2 .$$

Adott $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ esetén legyen

$$\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D) = \left\{ \rho \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \middle| \ \operatorname{Tr}_2(\rho) = D \right\} .$$

Parciális nyom

$$\mathrm{Tr}_2\, \rho(D_1, D_2, C) = \mathrm{Tr}_2 \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} = D_1 + D_2 .$$

Adott $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ esetén legyen

$$\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D) = \left\{ \rho \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}} \middle|\ \mathrm{Tr}_2(\rho) = D \right\} .$$

Tétel.

Adott $D \in \mathcal{D}_{2,\mathbb{K}}$ állapot esetén

$$\mathscr{P}_{\mathbb{K}} = \frac{V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D) \cap \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)^{\mathrm{szep}}\right)}{V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}(D)\right)} .$$

A D állapottól független a hozzá tartozó szeparabilitási valószínűség, ami Milz és Strunz sejtése volt.

Legyen D_1, D_2 2×2-es pozitív mátrix, melyre $\mathrm{Tr}(D_1 + D_2) = 1$.
A C $2x2$-es mátrixra

$$\begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}^{\mathrm{szep}}_{4,\mathbb{K}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} > 0, \begin{pmatrix} D_1 & C^* \\ C & D_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Legyen D_1, D_2 2×2-es pozitív mátrix, melyre $\mathrm{Tr}(D_1 + D_2) = 1$.
A C 2x2-es mátrixra

$$\begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} > 0, \begin{pmatrix} D_1 & C^* \\ C & D_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Schur-lemmája alapján ez ekvivalens a

$$I > \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)^* D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \Leftrightarrow \left\| D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \right\| < 1$$
$$I > \left(D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2}\right)^* D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} \Leftrightarrow \left\| D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} \right\| < 1$$

feltételekkel.

Legyen D_1, D_2 2×2-es pozitív mátrix, melyre $\mathrm{Tr}(D_1 + D_2) = 1$.
A C 2x2-es mátrixra

$$\begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_1 & C \\ C^* & D_2 \end{pmatrix} > 0, \begin{pmatrix} D_1 & C^* \\ C & D_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Schur-lemmája alapján ez ekvivalens a

$$I > \left(D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}\right)^* D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \Leftrightarrow \left\| D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \right\| < 1$$
$$I > \left(D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2}\right)^* D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} \Leftrightarrow \left\| D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2} \right\| < 1$$

feltételekkel.
Tekintsük az alábbi tartományokat.
$\Omega = \left\{ (D_1, D_2) \in \left(\mathbb{K}^{2\times 2}\right)^2 | D_1, D_2 > 0,\ \mathrm{Tr}(D_1 + D_2) = 1 \right\}$
$\mathcal{C}(D_1, D_2) = \left\{ C \in \mathbb{K}^{2\times 2} |\ \left\| D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2} \right\| < 1 \right\}$
Ekkor $\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}$ térfogata $V(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = \int_\Omega \int_{\mathcal{C}(D_1,D_2)} 1 \,\mathrm{d}C \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$.

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}\right)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathcal{C}(D_1,D_2)} 1\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}(D_1,D_2)$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathcal{C}(D_1,D_2)} \chi_{\left\|D_2^{-1/2}CD_1^{-1/2}\right\|<1}\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}(D_1,D_2)$$

$$V(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathcal{C}(D_1,D_2)} 1 \,\mathrm{d}C \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right) = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathcal{C}(D_1,D_2)} \chi_{\left\|D_2^{-1/2} C D_1^{-1/2}\right\|<1} \,\mathrm{d}C \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

Bevezetve az $X = D_1^{-1/2} C D_2^{-1/2}$ változót a fenti feltétel

$$\|X\| < 1, \ \left\| D_2^{-1/2} D_1^{1/2} X D_2^{1/2} D_1^{-1/2} \right\| < 1.$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}\right) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d \int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} 1 \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}(D_1, D_2)$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d \int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} \chi_{\left\| D_2^{-1/2} D_1^{1/2} X D_2^{1/2} D_1^{-1/2} \right\| < 1} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}(D_1, D_2)$$

ahol $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}\right)=\int\limits_{\Omega}\det(D_1 D_2)^d \int\limits_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} 1 \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right)=\int\limits_{\Omega}\det(D_1 D_2)^d \int\limits_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} \chi_{\left\|D_2^{-1/2} D_1^{1/2} X D_2^{1/2} D_1^{-1/2}\right\|<1} \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

ahol $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$.
Ha $V=D_2^{1/2}D_1^{-1/2}$, akkor $D_2^{-1/2}D_1^{1/2}XD_2^{1/2}D_1^{-1/2}=(V^*)^{-1}XV$.
A V mátrix szinguláris érték dekompozíciója: $V=U_1\Sigma U_2$.
Ekkor $\left\|(V^*)^{-1}XV\right\|=\left\|U_1\Sigma^{-1}U_2XU_1\Sigma U_2\right\|=\left\|\Sigma^{-1}U_2XU_1\Sigma\right\|$.

$$V(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d \int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} 1 \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d \int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} \chi_{\left\| D_2^{-1/2} D_1^{1/2} X D_2^{1/2} D_1^{-1/2} \right\| < 1} \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}(D_1, D_2)$$

ahol $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.
Ha $V = D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$, akkor $D_2^{-1/2} D_1^{1/2} X D_2^{1/2} D_1^{-1/2} = (V^*)^{-1} X V$.
A V mátrix szinguláris érték dekompozíciója: $V = U_1 \Sigma U_2$.
Ekkor $\left\|(V^*)^{-1} X V\right\| = \left\|U_1 \Sigma^{-1} U_2 X U_1 \Sigma U_2\right\| = \left\|\Sigma^{-1} U_2 X U_1 \Sigma\right\|$.
Mivel $X \mapsto U_2 X U_1$ euklidészi izometria, ezért

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d \int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} \chi_{\|\Sigma(D_1,D_2)^{-1} X \Sigma(D_1,D_2)\| < 1} \,\mathrm{d}X \,\mathrm{d}(D_1, D_2).$$

A Σ mátrix diagonális, főátlójában $D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$ sajátértékei állnak. Mivel Σ az $X \mapsto \Sigma^{-1} X \Sigma$ módon hat, ezért választható $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ alakúnak is, ahol ε a $D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$ sajátértékeinek a hányadosa

$$\varepsilon(D_1, D_2) = \exp\left(-\operatorname{arch}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\det(D_1 D_2^{-1})} \operatorname{Tr}(D_1^{-1} D_2) \right) \right).$$

A Σ mátrix diagonális, főátlójában $D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$ sajátértékei állnak. Mivel Σ az $X \mapsto \Sigma^{-1} X \Sigma$ módon hat, ezért választható $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ alakúnak is, ahol ε a $D_2^{1/2} D_1^{-1/2}$ sajátértékeinek a hányadosa

$$\varepsilon(D_1, D_2) = \exp\left(- \operatorname{arch}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\det(D_1 D_2^{-1})} \operatorname{Tr}(D_1^{-1} D_2) \right) \right).$$

$$V\left(\mathcal{D}_{4,\mathbb{K}}^{\mathrm{szep}}\right) = \int_{\Omega} \det(D_1 D_2)^d$$

$$\int_{\mathcal{B}_1(\mathbb{K}^{2\times 2})} \chi_{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(D_1, D_2) \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(D_1, D_2)^{-1} \end{pmatrix} \right\| < 1} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}(D_1, D_2).$$

A fő nehézséget a számolásban a

$$\chi(\varepsilon) = V\left(\left\{X \in \mathcal{B}_1\left(\mathbb{K}^{2\times 2}\right) \;\middle|\; \left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\right\| \le 1\right\}\right)$$

függvény meghatározása jelenti ($\varepsilon \in]0,1[$ értékekre).

A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben ismert az eredmény, a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eset még nyitott probléma.

Köszönöm a figyelmet!