Mi a kvantumtérelmélet? (És mi a kölcsönhatás?)

László András
laszlo.andras@wigner.hu
Wigner FK RMI

MT80

2021 szeptember 3.

Bevezető gondolatok

- Fizikában modelleket próbálunk alkotni. Minimum hozzávalók:
  – elképzelhető konfigurációk tere (kinematika),
  – megvalósulható konfigurációk tere (mozgásegyenlet/téregyenlet/kiválasztóegyenlet),
  – megfigyelhető mennyiségek és ezek kiértékelése,
  – izo- és automorfizmusok (szimmetriák).

- Matolcsi Tamás által feltárt egyik komoly probléma:
  csak ráhatásra van modellünk, kölcsönhatásra egyelőre nincs.

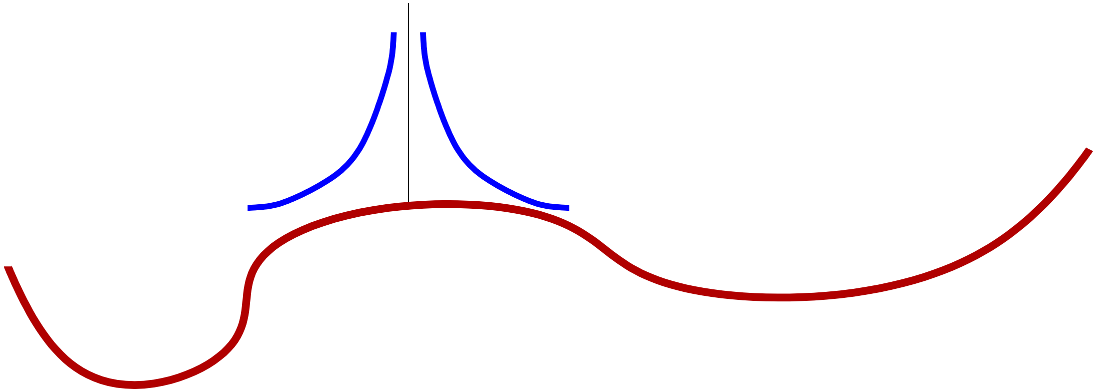
- Csak ráhatás van ezekben:
  – nemrelativisztikus v relativisztikus klasszikus- avagy kvantummechanika
  (részecske mozog adott mezőkben),
  – nemrelativisztikus v relativisztikus mezőelmélet
  (adott részecskekonfiguráció mezőket generál).

- Formailag lehet kölcsönhatás:
  – tisztán klasszikus mezőkkel (nemlineáris PDE-kkel) leírt modellben
  (de nem ismert ilyen tipusú jó modell a természetre).

- Állítólag kvantumtérelméletben is lehet:
  – de mi az, hogy kvantumtérelmélet? (pontosan mik a modell hozzávalói?)

Probléma a sajáttér szingularitása

Pontrészecske mechanika + térelmélet:



(A sajáttér szinguláris a részecske helyén. Hogyan kell kiértékelni a sajáttér-visszahatást?)

Mindenféle eljárásokat használnak, de nincs erre korrekt kombinált mozgás+téregyenlet.

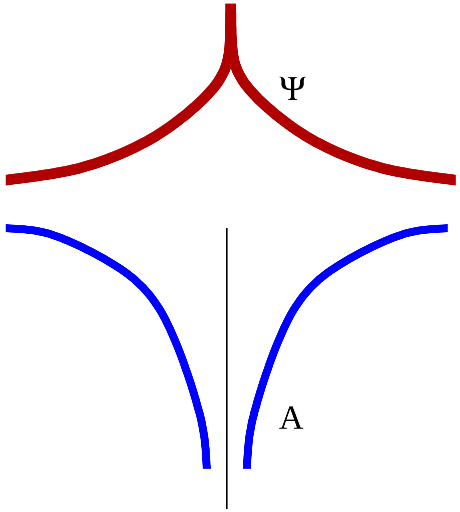
Pl részecske helyett “takonylabda”, aztán tartunk a méretével nullához.
(Vigyázni kell: a modell részben érzékeny lehet a “takonylabda” belső törvényeire.)

Mindjárt látjuk: ez biztosan nem jó pl részecskefizikára!

Nem a sajáttér szingularitása az igazi probléma!

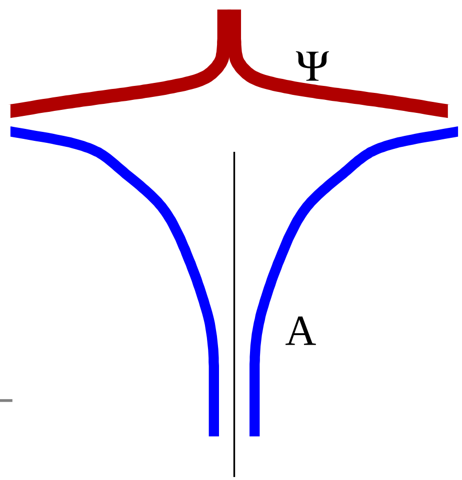
Tekintsük a hidrogénatom problémáját! Fix külső Coulomb-térben csapdázott Dirac-elektront.

$\gamma^a \mathrm{i}(\nabla_a + A_a)\Psi = m\,\Psi$ (Dirac-egyenlet), ahol $A = A^{\text{proton}}$ tisztán a külső tér:



$\longrightarrow$ A hidrogénspektrum jó (modulo QED effektusok).
Alapállapoti kötési energia: $\approx 13.6\,\mathrm{eV}$.

Ha A-t a $\nabla_a F(A)^{ab} = j_{\text{proton}}{}^b + \mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^b\Psi$ Maxwell-egyenletből vesszük
(azaz sajátteret visszacsatoljuk, és az eredő teret vesszük — Dirac-Maxwell-egyenlet):



$\longrightarrow$ Sajáttér nem szinguláris, formailag visszahatás OK.
De a hidrogénspektrum durván rossz!
Alapállapoti kötési energia: $\approx 6\,\mathrm{eV}$.
Mert az elektron részben leárnyékolná a proton terét.
Lehetne így, de a valóságban nem ezt teszi!
(A saját elektrosztatikus tér nem hat vissza!)

Hogy oldja meg a sajáttér-kizárást a kvantumtérelmélet?

Ehhez előszöris kéne kvantumtérelmélet.

Mi a kvantumtérelmélet?

Ne induljunk ki Hilbert-térből, és arra épített kvantummechanika-szerűségből!
[Az a kép a nemrelativisztikus kvantummechanikának egy maradványa.]

A kvantummechanikában a Hilbert-tér explicite függ a külső mezőktől!
[Adott A külső EM mezőben $\mathrm{H}(A, m)$ a Dirac-egyenlet gyenge megoldásainak a tere.]

Kvantumtérelmélet Hilbert-tér mentes megfogalmazása: Feynman-integrál.
[Ez tisztán klasszikus mezőkkel operál: támpont lehet a modell összetevőire.]

Klasszikus térelmélet

Legyen adva egy $\mathcal{M}$ sima sokaság (téridősokaság lesz belőle, de még nincs metrika).

Legyen adva egy $V(\mathcal{M})$ vektornyaláb (sima szelései az anyagmezők — metrika is itt ülne).

Ezeken vannak kovarians deriválások, ezek egy $DV(\mathcal{M})$ affin nyaláb sima szelései.
(Közvetítőmezők.) Alulfekvő vektornyalábja: $T^*(\mathcal{M}) \otimes V(\mathcal{M}) \otimes V^*(\mathcal{M}) =: CV(\mathcal{M})$.

Mindösszesen:
$\underbrace{(v, \nabla)}_{=:\psi} \in \underbrace{\Gamma\big(V(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} DV(\mathcal{M})\big)}_{=:F}$ egy mező konfiguráció.
Ezek az $\mathcal{E}$ sima függvény topológiával egy valós topologikus affinteret alkotnak.

$\underbrace{(\delta v, \delta C)}_{=:\delta\psi} \in \underbrace{\Gamma\big(V(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} CV(\mathcal{M})\big)}_{=:\mathbb{F}}$ egy mező variáció.
Ezek az $\mathcal{E}$ sima függvény topológiával egy valós topologikus vektorteret alkotnak.

Legyen adva egy Lagrange-forma, mely egy

$$\mathrm{L}:\ V(\mathcal{M})\ \oplus\ T^*(\mathcal{M})\otimes V(\mathcal{M})\ \oplus\ T^*(\mathcal{M})\wedge T^*(\mathcal{M})\otimes V(\mathcal{M})\otimes V^*(\mathcal{M})\ \longrightarrow\ \overset{\dim(\mathcal{M})}{\wedge}T^*(\mathcal{M})$$

pontonkénti sima nyaláb homomorfizmus.

Lagrange-i kifejezés:

$$\Gamma\big(V(\mathcal{M})\times_{\mathcal{M}} DV(\mathcal{M})\big)\ \longrightarrow\ \Gamma\big(\overset{m}{\wedge}T^*(\mathcal{M})\big),\quad (v,\nabla)\ \longmapsto\ \mathrm{L}(v,\nabla v,P(\nabla))$$

ahol $P(\nabla)$ a görbületi tenzor.

Hatásfunkcionál:

$$S^{\mathrm{L}}:\quad \underbrace{\Gamma\big(V(\mathcal{M})\times_{\mathcal{M}} DV(\mathcal{M})\big)}_{=:F}\ \longrightarrow\ \mathrm{Rad}(\mathcal{M},\mathbb{R}),\quad \underbrace{(v,\nabla)}_{=:\psi}\ \longmapsto\ \Big(\mathcal{K}\mapsto S^{\mathrm{L}}_{\mathcal{K}}(v,\nabla)\Big)$$

ahol $S^{\mathrm{L}}_{\mathcal{K}}(v,\nabla):=\int\limits_{\mathcal{K}}\mathrm{L}(v,\nabla v,P(\nabla))$ minden $\mathcal{K}\subset\mathcal{M}$ kompakt halmazra.

[Vigyázat: $S^{\mathrm{L}}_{\mathcal{M}}(v,\nabla)$ általában nem véges, pl már stacionárius konfigurációkra sem.]

Hatásfunkcionál $\mathcal{E} \to \mathrm{Rad}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ értelemben folytonos, sőt Fréchet-diffható.

Fréchet deriváltja

$$DS^{\mathrm{L}} : \quad F \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{Rad}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \quad (\psi, \delta\psi) \longmapsto \Big(\mathcal{K} \mapsto \big(DS^{\mathrm{L}}_{\mathcal{K}}(\psi) \,\big|\, \delta\psi\big)\Big)$$

a szokásos Euler-Lagrange integrál $\mathcal{K}$-ra + a szokásos peremintegrál $\partial\mathcal{K}$-ra.
Változóiban közösen folyonos, második változójában lineáris.

Legyen $\mathbb{F}_T$ a kompakt tartójú $\mathbb{F}$-beli mezők tere a szokásos $\mathcal{D}$ tesztfüggvény topológiával.
(teszt-mezővariációk tere)

Euler-Lagrange-funkcionál:
Ha a második változójában DS^{L}-t megszorítjuk $\mathbb{F}_T$-re, akkor már egész $\mathcal{M}$-re is véges.

$$E^{\mathrm{L}} : \quad F \times \mathbb{F}_T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\psi,\, \delta\psi_T) \longmapsto \big(E^{\mathrm{L}}(\psi) \,\big|\, \delta\psi_T\big) := \big(DS^{\mathrm{L}}_{\mathcal{M}}(\psi) \,\big|\, \delta\psi_T\big)$$

Csak az Euler-Lagrange integrál marad, peremtag nem. Egész $\mathcal{M}$-re értelmes, valós értékű.
Közös változóiban szekvenciálisan folytonos, másodikban lineáris. (Avagy: $E^{\mathrm{L}} : F \to \mathbb{F}_T^*$)

Kiválasztóegyenlet (téregyenlet):

$$\psi \in F\ ? \qquad \forall\, \delta\psi_T \in \mathbb{F}_T : \ \big(E^{\mathrm{L}}(\psi) \,\big|\, \delta\psi_T\big) = 0.$$

Megfigyelhető mennyiségek az $O : F \to \mathbb{R}$ folytonos leképezések.

Feynman-integrálos megfogalmazás

Rögzítsünk egy tetszőleges $\psi_0 \in F$ háttérmezőt az $F \to \mathbb{F}$ vektorizáláshoz.

Legyenek $J_1, ..., J_n \in \mathbb{F}^*$ teszt-funkcionálok, akkor a $(J_1|\cdot - \psi_0) \cdot ... \cdot (J_n|\cdot - \psi_0) : F \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség kauzálisan rendezett kvantum várhatóértéke ρ kvantumállapotban:

$$\left(\int\limits_{\psi \in F} \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{M}}(\psi)} \, [\mathrm{d}\psi]_\rho \right)^{-1} \int\limits_{\psi \in F} (J_1|\psi - \psi_0) \cdot ... \cdot (J_n|\psi - \psi_0) \;\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{M}}(\psi)} \, [\mathrm{d}\psi]_\rho .$$

Kényelmes bevezetni a partíciós függvényt ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{M}}(\psi)} \, [\mathrm{d}\psi]_\rho$ Fourier-trafója):

$$Z_{\psi_0,\rho} : \quad \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad J \longmapsto Z_{\psi_0,\rho}(J) := \int\limits_{\psi \in F} \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{M}}(\psi)} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(J|\psi - \psi_0)} \, [\mathrm{d}\psi]_\rho ,$$

és az ebből kapható

$$G^{(n)}_{\psi_0,\rho} \quad := \quad \left((-\mathrm{i})^n \, \frac{1}{Z_{\psi_0,\rho}(J)} \, D^{(n)} Z_{\psi_0,\rho}(J) \right) \Bigg|_{J=0}$$

n-mező korrelátort, és ezek $G_{\psi_0,\rho} := \left(G^{(0)}_{\psi_0,\rho}, G^{(1)}_{\psi_0,\rho}, ..., G^{(n)}_{\psi_0,\rho}, ... \right) \in \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \overset{n}{\otimes} \mathbb{F}$ összességét.

A fenti kvantum várhatóérték ezzel kifejezve:

$$\Big(\, (J_1|\cdot - \psi_0) \otimes ... \otimes (J_n|\cdot - \psi_0) \; \Big| \; G^{(n)}_{\psi_0,\rho} \, \Big).$$

Gondok vannak, nincs $[\mathrm{d}\psi]_\rho$ mérték, se $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathcal{M}}(\psi)}[\mathrm{d}\psi]_\rho$, még nagyon átvitt értelemben sem. Nem is beszélve a formálisan alkalmazott Fourier-trafó szabályokról.

Ha mindezektől eltekintünk, Feynman-integrál "$\Longleftrightarrow$" master-Dyson-Schwinger-egyenlet:

$$Z:\mathbb{F}^*\to\mathbb{C}\,? \qquad \Big(\;\mathbf{E}((-\mathrm{i})D_{\mathbb{F}^*}+\psi_0)\;+\;\mathrm{I}_{\mathbb{F}^*}\;\Big)\,Z\;=\;0.$$

Ez kiválasztó egyenlet lenne (Feynman-integrál helyett) a megvalósuló $Z_{\psi_0,\rho}$-kra.

Ha átjátsszuk a mező korrelátorokra, MDS-egyenlet még értelmessé is tehető:

$$\underbrace{G\in\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}\overset{n}{\otimes}\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}_{=:\mathcal{T}(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})}\,? \qquad G^{(0)}=1\ \text{és}\ \forall\,\delta\psi_T\in\mathbb{F}_T:\ \Big(\;(\mathbf{E}_{\psi_0}\,|\,\delta\psi_T)\;-\;\mathrm{i}\,L_{\delta\psi_T}\;\Big)G\;=\;0$$

Ez kiválasztó egyenlet lenne (Feynman-integrál helyett) a megvalósuló $G_{\psi_0,\rho}$-kra.

Itt $L_{\delta\psi_T}$ a balról szorzás, $E_{\psi_0}:=E\circ(\mathrm{I}_{\mathbb{F}}+\psi_0)$ a vektorizált Euler-Lagrange funkcionál, és $\mathbf{E}_{\psi_0}\in\underbrace{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}\overset{n}{\otimes}\mathbb{F}^*}_{=:\mathcal{T}_a(\mathbb{F}^*)}\otimes\mathbb{F}^*_T$, hogy

$$\forall\,\psi\in\mathbb{F},\,\delta\psi_T\in\mathbb{F}_T:\ \Big(E_{\psi_0}(\psi-\psi_0)\,\Big|\,\delta\psi_T\Big)=\Big(\mathbf{E}_{\psi_0}\,\Big|\,(1,\,\overset{1}{\otimes}(\psi-\psi_0),\,\overset{2}{\otimes}(\psi-\psi_0),\,\ldots)\otimes\delta\psi_T\Big).$$

Kvantumtérelmélet megfogalmazása MDS-egyenlettel

A kvantumállapotok a $(\psi_0, G_{\psi_0}) \in F \times \mathcal{T}(F_{\mathbb{C}})$ párok, melyek megoldják az MDS egyenletet, és még eleget tesznek egy pozitivitási mellékfeltételnek:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ J \in \mathrm{Re}(\mathbb{F}^*_{\mathbb{C}}): \quad \mathrm{Re}\,\Big(\overset{2n}{\otimes} J \,\Big|\, G^{(2n)}\Big) \;\geq\; 0$$

(nem a Feynman-integrálból jön, hanem további QFT heurisztikából $\sim$ Wightman-pozitivitás).

Kevert állapot: különböző kvantumállapotok konvex kombinációja. Tiszta állapot: nem kevert.

Egy $O : F \to \mathbb{R}$ klasszikus polinomiális megfigyelhető mennyiség kvantum várhatóértéke:

$$\mu_{(\psi_0, G_{\psi_0})}(O) \quad := \quad \Big(\, \mathbf{O}_{\psi_0} \,\Big|\, G_{\psi_0} \,\Big)$$

ahol $O_{\psi_0} := O \circ (\mathrm{I}_{\mathbb{F}} + \psi_0)$ a vektorizált O, és $\mathbf{O}_{\psi_0} \in \underbrace{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{n}{\otimes}\, \mathbb{F}^*}_{=:\mathcal{T}_a(\mathbb{F}^*)}$, hogy

$$\forall\, \psi \in \mathbb{F}: \quad O_{\psi_0}(\psi{-}\psi_0) \;=\; \Big(\mathbf{O}_{\psi_0} \,\Big|\, \big(1,\, \overset{1}{\otimes}(\psi{-}\psi_0),\, \overset{2}{\otimes}(\psi{-}\psi_0),\, \ldots\big)\Big).$$

[Mindez általánosítható analítikus Euler-Lagrangera, ill analítikus megf.mennyiségekre.]

Nade mi van a kölcsönhatással?

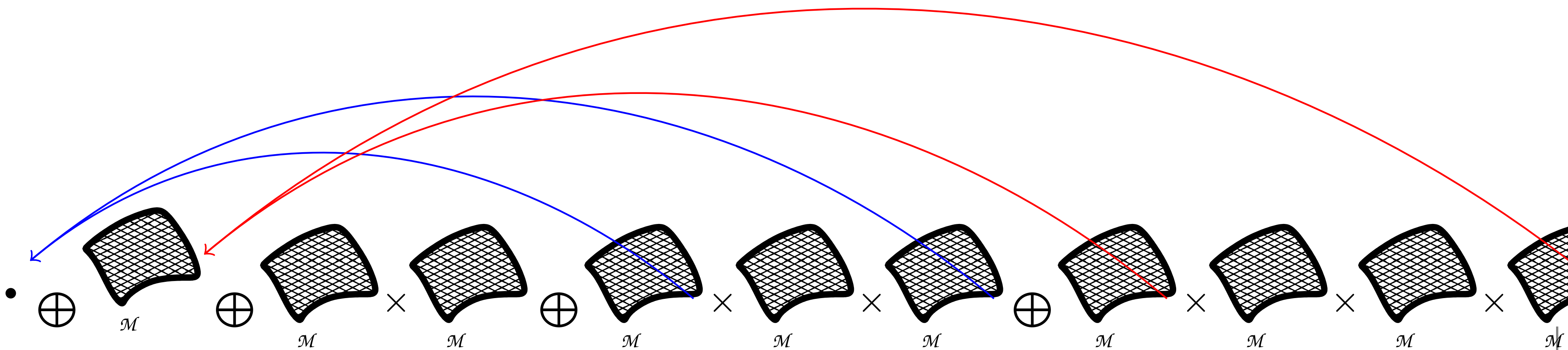
Szabad elmélet: $E_{\psi_0} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^*_T$ lineáris vmely $\psi_0 \in F$-re. Kcsható elmélet: nem szabad.

Pl fix Minkowski-téridő fölött $\big(E(\varphi) \,\big|\, \delta\varphi_T \big) = \int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{v}\, \delta\varphi_T \, \Box\varphi \;+\; \int\limits_{\mathcal{M}} \mathrm{v}\, \delta\varphi_T \, \varphi^3$ a φ^4 elmélet.

Ebből legyártva a $(\mathbf{E}(\cdot)|\delta\psi_T) \in \mathcal{T}_a(\mathbb{F}^*)$ elemet, és a neki megfelelő inzerciós operátort:

$$\big(\mathbf{E}\, G \,\big|\, \delta\varphi_T \big)^{(n)}(x_1, ..., x_n) =$$
$$\int\limits_{y\in\mathcal{M}} \mathrm{v}(y)\, \delta\varphi_T(y)\, \Box_y G^{(n+1)}(y, x_1, ..., x_n) \;+\; \int\limits_{y\in\mathcal{M}} \mathrm{v}(y)\, \delta\varphi_T(y)\; G^{(n+3)}(y, y, y, x_1, ..., x_n)$$

mely a $G \in \mathcal{T}(\mathbb{F})$ mező korrelátorokon hat.



[A sajáttér nem közvetlen sajátmagára hat vissza. Ez jó!]

Ez jó. De: a szabad hullámegyenletre az MDS megoldástere üres!
Csak disztribúció értelemben van megoldása. $\to$ Kölcsönható esetben sem lesz jobb vszleg.

Kölcsönhatási tag disztribúciókkal? $\int\limits_{y\in\mathcal{M}} \mathrm{v}(y)\,\delta\varphi_T(y)\; G^{(n+3)}(y,y,y,x_1,...,x_n)$

Ezt meg hogyan? A kölcsönható MDS operátor ugyan sűrűn értelmezett (reg.disztribúciókon OK).

De kiderül: nem lezárható. $\Leftrightarrow$ Limeszekkel nem lehet egyértelműen kiterjeszteni disztribúciókra.

Mást csinálnak ezért: regularizált MDS-egyenlet. Legyen C_κ simító operátor (kb konvolúció).

$$G_{\psi_0,\kappa} \in \underbrace{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{n}{\otimes}\, \mathbb{F}_{\mathbb{C}}}_{=:\mathcal{T}(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})} \;? \qquad G^{(0)}_{\psi_0,\kappa} = 1 \;\text{ és }\; \forall\,\delta\psi_T \in \mathbb{F}_T \,:\, \Big((\mathbf{E}_{\psi_0}\,|\,\delta\psi_T) \;-\; \mathrm{i}\,L_{C_\kappa\delta\psi_T} \Big)\, G_{\psi_0,\kappa} \;=\; 0$$

Ez kiválasztó egyenlet lenne (Feynman-integrál helyett) a megvalósuló $G_{\psi_0,\kappa}$-kra.

Mi lesz $G_{\psi_0,\kappa}$-val az $\kappa \to \delta_0$ limeszben? (Ez a kérdés, renormalizáció.)

Összefoglaló

- Matolcsi Tamás egyik nagy felismerése:
  csak ráhatást tudnak a jól ismert modellek.
- Ezt szerettem volna elmondani:
  nem elég a részecskét elkenni, koncepcionális baj van.
- Kvantumtérelmélet: állítólag ezt helyre teszi.
  De mi a kvantumtérelmélet?
- Szerintem: az MDS egyenlet a kiválasztó egyenlet.
- Regularizálva OK-nak tűnik.
- Vizsgálni kell: regularizációval mi lesz? (Lezárhatóság?)

Tartalék fóliák

A Fréchet-derivált top.vektorterekben

Legyen F és G valós topológikus affintér, Hausdorff lokálisan konvex topológiával.
Alulfekvő vektorterek: $\mathbb{F}$ és $\mathbb{G}$.

Egy $S: F \to G$ Fréchet–Hadamard diffható $\psi \in F$ helyen:
létezik $DS(\psi): \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ folyt.lin., hogy minden $n \mapsto h_n$ $\mathbb{F}$-beli sorozatra, és seholsem nulla $n \mapsto t_n$ $\mathbb{R}$-beli sorozatra mely nullához tart,

$$(\mathbb{G}) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{S(\psi + t_n\, h_n) - S(\psi)}{t_n} - DS(\psi)\, h_n \right) \quad = \quad 0$$

igaz.

A hatásfunkcionál Fréchet-deriváltja

$S^{\mathrm{L}} : F \longrightarrow \mathrm{Rad}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ Fréchet-deriváltja:

$$DS^{\mathrm{L}} : F \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{Rad}(\mathcal{M}, \mathbb{R}),\ (\psi, \delta\psi) \longmapsto \Big(\mathcal{K} \mapsto \big(DS^{\mathrm{L}}_{\mathcal{K}}(\psi) \big| \delta\psi\big)\Big)$$

Adott $\underbrace{(v, \nabla)}_{=:\psi} \in F$ mezőkonfiguráció esetén

$$\underbrace{(\delta v, \delta C)}_{=:\delta\psi} \ \mapsto\ \big(DS^{\mathrm{L}}_{\mathcal{K}}(v, \nabla) \,\big|\, (\delta v, \delta C)\big) =$$

$$\int_{\mathcal{K}} \Big(D_1 \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))\, \delta v + D_2^a \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))\, (\nabla_a \delta v + \delta C_a v) + 2\, D_3^{[ab]} \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))\, \tilde{\nabla}_{[a} \delta C_{b]}\Big)$$

$$= \int_{\mathcal{K}} \Big(D_1 \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[c_1 \dots c_m]}\, \delta v - \big(\tilde{\nabla}_a D_2^a \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[c_1 \dots c_m]}\big)\, \delta v\Big) +$$

$$\Big(D_2^a \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[c_1 \dots c_m]}\, \delta C_a v - 2\, \big(\tilde{\nabla}_a D_3^{[ab]} \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[c_1 \dots c_m]}\big)\, \delta C_b\Big)$$

$$+\ m \int_{\partial\mathcal{K}} \Big(D_2^a \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[a c_1 \dots c_{m-1}]}\, \delta v + 2\, D_3^{[ab]} \mathrm{L}(v, \nabla v, P(\nabla))_{[a c_1 \dots c_{m-1}]}\, \delta C_b\Big)$$

$$(m := \dim(\mathcal{M}))$$

[szokásos Euler-Lagrange-kifejezés + peremtag]

Disztribúciók sokaságokon

$V(\mathcal{M})$ vektornyaláb, $V^{\times}(\mathcal{M}) := V^{*}(\mathcal{M}) \otimes \overset{\dim(\mathcal{M})}{\wedge} T^{*}(\mathcal{M})$ a de Rham duálisa.
$V^{\times\times}(\mathcal{M}) \equiv V(\mathcal{M})$.

Értelemszerű jelölésekkel: $\mathbb{F}^{\times}$ és $\mathbb{F}_{T}^{\times}$ az $\mathbb{F}$ és $\mathbb{F}_{T}$ de Rham duálisai.

$\mathbb{F} \times \mathbb{F}_{T}^{\times} \to \mathbb{R}$, $(\delta\psi, p_{T}) \mapsto \int\limits_{\mathcal{M}} \delta\psi\, p_{T}$ és $\mathbb{F}_{T} \times \mathbb{F}^{\times} \to \mathbb{R}$, $(\delta\psi_{T}, p) \mapsto \int\limits_{\mathcal{M}} \delta\psi_{T}\, p$ közösen szekvenciálisan folytonosak.

Ezért $\mathbb{F} \subset \left(\mathbb{F}_{T}^{\times}\right)^{*}$ és $\mathbb{F}_{T} \subset \left(\mathbb{F}^{\times}\right)^{*}$ folytonos sűrű $\mathcal{E} \to \mathcal{D}^{*}$ és $\mathcal{D} \to \mathcal{E}^{*}$ beágyazás.
(disztribúciós szelések)

Legyen $A : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ foly.lin leképezés.
Van neki formális transzponáltja, ha létezik $A^{t} : \mathbb{F}_{T}^{\times} \to \mathbb{F}_{T}^{\times}$ foly.lin., hogy
$\forall \delta\psi \in \mathbb{F}$ és $p_{T} \in \mathbb{F}_{T}^{\times}$: $\int\limits_{\mathcal{M}} (A\,\delta\psi)\, p_{T} = \int\limits_{\mathcal{M}} \delta\psi\, (A^{t}\, p_{T})$.
A formális transzponált topológiai transzponáltja $\left(A^{t}\right)^{*} : \left(\mathbb{F}_{T}^{\times}\right)^{*} \to \left(\mathbb{F}_{T}^{\times}\right)^{*}$ az A operátor disztribúciós kiterjesztése.
Nem mindig van.

Alapmegoldás sokaságokon

Legyen $E : F \times \mathbb{F}_T \to \mathbb{R}$ Euler-Lagrange funkcionál, és $J \in \mathbb{F}_T^*$.

$\mathtt{K}_{(J)} \in F$ megoldás J forrással, ha $\forall \delta\psi_T \in \mathbb{F}_T : \ (E(\mathtt{K}_{(J)}) \,|\, \delta\psi_T) = (J|\delta\psi_T)$.

Speciálisan: lehet csupán $J \in \mathbb{F}_T^\times \subset \mathbb{F}^\times \subset \mathbb{F}_T^*$.

Egy $\mathtt{K} : \mathbb{F}_T^\times \to F$ folyt.leképezés alapmegoldás, ha minden $J \in \mathbb{F}_T^\times$-re a $\mathtt{K}(J) \in F$ mező megoldás J forrással.

Nem mindig létezik, és ha igen, általában több is van.

Ha $\mathtt{K}_{\psi_0} : \mathbb{F}_T^\times \to \mathbb{F}$ vektorizált alapmegoldás lineáris (pl lineáris $E_{\psi_0} : \mathbb{F} \to {\mathbb{F}_T}^*$ esetén): $\mathtt{K}_{\psi_0} \in \mathcal{L}in(\mathbb{F}_T^\times, \mathbb{F}) \subset (\mathbb{F}_T^\times)^* \otimes (\mathbb{F}_T^\times)^*$ disztribúció.

A konvolúció általánosítása sokaságokra

Konvolúció áltreles általánosítása:
Legyen $\kappa \in \mathbb{F}\otimes\mathbb{F}^{\times}$. (Azaz κ egy $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ fölötti szelés.)

$C_\kappa : \mathbb{F}_T \to \mathbb{F}$ foly.lin., ahol $\big(C_\kappa\, \delta\psi_T\big)(x) := \int_{y\in\mathcal{M}} \kappa(x,y)\, \delta\psi_T(y) \;\; \forall \delta\psi_T \in \mathbb{F}_T, x \in \mathcal{M}$.

$C_\kappa^t : \mathbb{F}_T^{\times} \to \mathbb{F}^{\times}$ folyt.lin., ahol $\big(C_\kappa^t\, p_T\big)(y) := \int_{x\in\mathcal{M}} p_T(x)\, \kappa(x,y) \;\; \forall p_T \in \mathbb{F}_T^{\times}, y \in \mathcal{M}$.

parciálisan kompakt tartójú κ: $\forall\, \mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ kompaktra
$\{(x,y) \in \mathcal{M}\times\mathcal{M} \,|\, x \in \mathcal{K},\ \kappa(x,y) \neq 0\}$ és $\{(x,y) \in \mathcal{M}\times\mathcal{M} \,|\, y \in \mathcal{K},\ \kappa(x,y) \neq 0\}$
lezártja kompakt.

Ekkor C_κ folyt.lin. $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ és C_κ^t folyt.lin. $\mathbb{F}^{\times} \to \mathbb{F}^{\times}$.
Ekkor C_κ folyt.lin. $\mathbb{F}_T \to \mathbb{F}_T$ és C_κ^t folyt.lin. $\mathbb{F}_T^{\times} \to \mathbb{F}_T^{\times}$.
Disztribúciókon ezek transzponáltja.

PI Minkowski-n a közönséges konvolúció:
$\mathcal{M}$ (affin tér), T (alulfekvő vektortér), v (konstans térfogati forma).
Legyen $\eta : T \to \mathbb{R}$ sima kompakt tartójú.

Legyen $(x,y) \mapsto \kappa(x,y) := \eta(x-y)\, \mathrm{v}(y)\, I$.

Ekkor $\delta\psi \in \mathbb{F}$: $C_\kappa\, \delta\psi = \eta \star \delta\psi$.

A szabad MDS-egyenlet megoldásai

A szabad MDS-egyenlet disztribúciós megoldásai:

$$
\begin{aligned}
G^{(0)}_{\psi_0} &= 1, \\
G^{(1)}_{\psi_0} &= \delta\psi, \\
G^{(2)}_{\psi_0} &= \mathrm{i}\,\mathtt{K}^{(2)}_{\psi_0} \;+\; \tfrac{1}{2!}\,\delta\psi\otimes\delta\psi, \\
G^{(n)}_{\psi_0} &= \delta\psi \text{ és } \mathrm{i}\,\mathtt{K}^{(2)}_{\psi_0} \text{ kombinatorikusan lehetséges } n\text{-ed rendű tenzorszorzatainak összege.}
\end{aligned}
$$

A szabad regularizált MDS-egyenlet függvény megoldásai:

$$
\begin{aligned}
G^{(0)}_{\psi_0,\kappa} &= 1, \\
G^{(1)}_{\psi_0,\kappa} &= \delta\psi, \\
G^{(2)}_{\psi_0,\kappa} &= \mathrm{i}\,C_\kappa\mathtt{K}^{(2)}_{\psi_0} \;+\; \tfrac{1}{2!}\,\delta\psi\otimes\delta\psi, \\
G^{(n)}_{\psi_0,\kappa} &= \delta\psi \text{ és } \mathrm{i}\,C_\kappa\mathtt{K}^{(2)}_{\psi_0} \text{ kombinatorikusan lehetséges } n\text{-ed rendű tenzorszorzatainak összege.}
\end{aligned}
$$

[Itt $C_\kappa(\cdot) := \eta\star(\cdot)$ egy η tesztfüggvénnyel való konvolúció, mint előbb.]

Renormálás funkanal szempontból

Legyen $\mathbb{F}$ és $\mathbb{G}$ valós v komplex top.vektortér, Hausdorff lokálisan konvex teljes.

Legyen $M : \mathbb{F} \rightarrowtail \mathbb{G}$ sűrűn értelmezett lineáris leképezés (esetünkben pl: MDS operátor).

Zárt: a leképezés grafikonja zárt halmaz.

Lezárható: van olyan lineáris kiterjesztése, hogy grafikonja zárt (ez egyértelmű).

Lezárható $\Leftrightarrow$ ahol limeszekkel ki lehet terjeszteni, ott az egyértelmű.

Többértelműségi halmaz:
$\mathrm{Mul}(M) := \Big\{ y \in \mathbb{G} \,\Big|\, \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathrm{Dom}(M)$-béli, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} M x_n = y \Big\}$.

$\mathrm{Mul}(M)$ mindig zárt altér.

Lezárható $\Leftrightarrow \mathrm{Mul}(M) = \{0\}$.

Maximálisan nemlezárható $\Leftrightarrow \mathrm{Mul}(M) = \overline{\mathrm{Ran}(M)}$. Patológikus, még lezárható része sincs.

Polinomiáls kölcsönhatási tag MDS operátorban maximálisan nemlezárható!
(Sőt, $\mathrm{Mul}(M_{\mathsf{kcsh}}) = \overline{\mathrm{Ran}(M_{\mathsf{kcsh}})}$ = egész tér.)

MDS operátor:

$$\mathbf{M}: \quad \mathbb{F}_T \otimes \mathcal{T}(\mathbb{F}_\mathbb{C}) \to \mathcal{T}(\mathbb{F}_\mathbb{C}), \qquad G \mapsto \mathbf{M}\,G$$

lineáris, $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mindenütt értelmezett folytonos. Azaz:

$$\mathbf{M}: \quad \mathcal{T}(\mathbb{F}^{\times\,*}_{T\,\mathbb{C}}) \rightarrowtail \mathbb{F}^*_T \otimes \mathcal{T}(\mathbb{F}^{\times\,*}_{T\,\mathbb{C}}), \quad G \mapsto \mathbf{M}\,G$$

lineáris, sűrűn értelmezett mint $\mathcal{D}^* \rightarrowtail \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}^*$ operátor.

Hasonlóan: $\mathbf{M}_\kappa$ regularizált MDS operátor (κ: egy fix regularizátor, mint korábban).

Nem jó limeszes kiválasztóegyenlet:

$$G \in \mathcal{T}(\mathbb{F}^{\times\,*}_{T\,\mathbb{C}})\ ? \qquad G^{(0)} = 1 \text{ és } \exists\, G_\kappa \to G \text{ közelítő sorozat, hogy } : \lim_{\kappa\to\delta_0} \mathbf{M}\, G_\kappa = 0.$$

Ez minden G-t kiválasztana, mert kcsh tag $\mathrm{Mul}()$-halmaza az egész tér.

Nem jó limeszes kiválasztóegyenlet:

$$G \in \mathcal{T}(\mathbb{F}^{\times\,*}_{T\,\mathbb{C}})\ ? \qquad G^{(0)} = 1 \text{ és } \exists\, G_\kappa \to G \text{ közelítő sorozat, hogy } : \lim_{\kappa\to\delta_0} \mathbf{M}_\kappa\, G_\kappa = 0.$$

Ez minden G-t kiválasztana, mert kcsh tag $\mathrm{Mul}()$-halmaza az egész tér.

Lehet jó esetleg:

$$G \in \mathcal{T}(\mathbb{F}^{\times\,*}_{T\,\mathbb{C}})\ ?$$

$\exists\ (\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \delta_0$-közelítő sorozat

és $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{T}(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})$-béli G-hez disztribúció értelemben tartó sorozat :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}:$$

$$G_n^{(0)} = 1,$$
$$\forall\ \delta\psi_T \in \mathbb{F}_T:\ \mathbf{M}_{\delta\psi_T,\kappa_n}\, G_n = 0.$$

Kb. implicit függvény-szerűen keressük, nem lezárt operátor magjaként. Vizsgálni kellene.

Futó csatolás:
Ha $\mathbf{M}_\kappa$-beli Euler-Lagrange tagok $g(\kappa)$ funkcionálokkal vannak összesúlyozva.
(Nem simán valós csatolási állandókkal.)