BEVEZETÉS

Néhány fogalom és jelölés

Ismertnek vesszük a szokásos halmazelméleti fogalmakat és jelöléseket.

$=$ az állító egyenlőség, $:=$ a definiáló egyenlőség.

Ismertnek tekintjük a függvény fogalmát. Függvényekre vonatkozó alapvető jelöléseink a következők.

Legyen A és B halmaz.

$f : A \rightarrowtail B$ olyan függvényt jelöl, amelynek értrlemzési tartománya, $\mathrm{Dom}(f)$, az A része, értékkészlete, $\mathrm{Ran}(f)$ a B része,

$f : A \to B$ azt jelöli, hogy f az egész A-n értelmezve van, azaz $\mathrm{Dom}(f) = A$.

Ha $H \subset A$, akkor $f[H] := \{f(x) \mid x \in H \cap \mathrm{Dom}(f)\}$. Figyeljünk a különbségre: ha $x \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f[\{x\}] = \{f(x)\}$, ha $x \notin \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f(x)$ értelmetlen, viszont $f[\{x\}] = \emptyset$.

Ha $G \subset B$, akkor $\overset{-1}{f}(G) := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in G\}$, amelyet a G **ősképének** hívunk. $\overset{-1}{f}$ elnevezése: az f **teljes inverze**.

ELSŐ RÉSZ

TUDNIVALÓK A VEKTORTEREKRŐL

1. Dualitás

1.1. Kovektorok

Tekintsük a $\mathbf{V}$ véges n-dimenziós vektorteret a valós vagy komplex számok $\mathbb{K}$ teste felett. A $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezések összességét a $\mathbf{V}$ **duálisának** hívjuk és $\mathbf{V}^*$-gal jelöljük. Ez a szokásos pontonként értelmezett műveletekkel vektortér, amelynek a dimenziója egyenlő a $\mathbf{V}$ dimenziójával.

A $\mathbf{V}$ elemeit vektoroknak hívjuk, a duálisának, $\mathbf{V}^*$-nak az elemeit **kovektoroknak**.

A $\boldsymbol{p}$ kovektornak a $\boldsymbol{v}$ vektoron felvett értékére $(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v})$ jelölést alkalmazzuk.

$\mathbf{V}$ azonosítható $\mathbf{V}^*$ duálisával, $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^{**}$ úgy, hogy a $\boldsymbol{v}$ vektort a $\mathbf{V}^* \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{p} \mapsto (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v})$ leképezésnek fogjuk fel. Ezen azonosítás szerint tehát a "ko-kovektorok" vektorok, és ennek megfelelően írhatjuk, hogy $(\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v})$ bármely $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^*$ esetén.

1.2. Transzponáltak

Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés **transzponáltja** az

$$\boldsymbol{L}^* : \mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*, \qquad \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{L}$$

formulával meghatározott lineáris leképezés, azaz minden $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^*$ és $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ esetén

$$(\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{L}\boldsymbol{v}),$$

vagy a $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ azonosítással

$$(\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{p}).$$

Az is fennáll a $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ azonosítás szerint, hogy

$$\boldsymbol{L}^{**} = \boldsymbol{L}.$$

Továbbá

- $\boldsymbol{L}$ akkor és csak akkor injektív, ha $\boldsymbol{L}^*$ szürjektív,
- $\boldsymbol{L}$ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\boldsymbol{L}^*$ injektív.

Ha $\boldsymbol{L}$ bijekció, akkor

$$\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^* = \left(\boldsymbol{L}^*\right)^{-1}.$$

Ha $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{K})^* = \boldsymbol{L}^* + \boldsymbol{K}^*, \qquad (\alpha \boldsymbol{L})^* = \alpha \boldsymbol{L}^*,$$

és

$$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{L})^* = \boldsymbol{L}^* \boldsymbol{K}^*.$$

Az előzőekhez hasonlóan, az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés transzponáltja a $\boldsymbol{A}^* : \mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés, amelyet

$$(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}) \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V})$$

határoz meg.

Értelemszerűen hasonlóképp definiáljuk a $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezések transzponáltját, amelyek $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$, illetve $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések

Egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés transzponáltja ugyancsak $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés, értelmes tehát a következő meghatározás: $\boldsymbol{A}$ **szimmetrikus**, illetve **antiszimmetrikus**, ha $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$, illetve $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$.

Hasonlóképpen értelmezzük $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus voltát.

Viszont egy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképzés transzponáltja $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés, így ilyenekre **nem értelmes** a szimmetrikusság, antiszimmetrikusság fogalma; jegyezzük meg ezt a fontos tényt.

Végül két megjegyzés:

1. A mondottak értelemszerűen általánosíthatók $\mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris lekpezésekre is, ahol $\mathbf{U}$ szintén véges dimenziós vektortér.

2. Nem véges dimenziós esetben is a formulák jó része érvényben marad; a különbségek abból adódnak, hogy $\mathbf{V}$ általában nem azonosítható $\mathbf{V}^{**}$-gal, csak annak egy lineáris alterével.

1.3. Tenzorszorzás

A $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}$ **tenzorszorzata** a

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{u})$$

lineáris leképezés. Hasonlóképpen, $\boldsymbol{q} \in \mathbf{V}^*$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^*$ tenzorszorzata a

$$\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*, \qquad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{u})$$

lineáris leképzés. Értelemszerű ezután a $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{v}$ jelentése.

A meghatározásból azonnal adódik a transzponáltakra vonatkozó fontos formula:

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p})^* = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{v}, \qquad (\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p})^* = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}.$$

1.4. Bázisok

A $\mathbf{V}$ egy $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ bázisa meghatározza a $\mathbf{V}^*$ egy $\boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^n$ bázisát, amelyet az adott **bázis duálisának** hívunk, úgy, hogy $(\boldsymbol{f}^i \mid \boldsymbol{e}_k) = \delta^i_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Ezekkel bármely $\boldsymbol{v}$ vektorra és $\boldsymbol{p}$ kovektorra fennállnak az

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{f}^k \mid \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{f}^k \tag{1}$$

egyenlőségek. Más formában ugyanezek:

$$v^k := (\boldsymbol{f}^k \mid \boldsymbol{v}), \quad \text{illetve} \quad p_k := (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{e}_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

a vektor, illetve a kovektor **koordinátái** vagy **komponensei** az adott bázisokra vonatkozóan, és

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} v^k \boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{n} p_k \boldsymbol{f}^k,$$

Továbbá

$$(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{n} p_k v^k.$$

Egy vektor koordinátáinak együttese, csakúgy, mint egy kovektor koordinátáinak az együttese az $\mathbb{R}^n$ eleme. A vektorok, illetve a kovektorok koordinátázása $\mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$, illetve $bV^* \to \mathbb{R}^n$ lineáris bijekció.

Koordinátákban a kovektorok ugyanúgy „néznek ki", mint a vektorok. Hogy mégis különbséget tudjunk tenni a kovektorok és vektorok koordinátázott alakja között, a szokásnak megfelelően a vektorok koordinátáit felső indexszel látjuk el, a kovektorok koordinátáit alsó indexszel.

Az indexek mindig az $1, \ldots, n$ értéket veszik fel, ezért a továbbiakban elhagyjuk ennek a kiírását.

Úgy van meghatározva a „felső-alsó" index konvenciója, hogy összegezni mindig ellenkező pozícióban levő indexekre kell 1-től n-ig. Ezért a továbbiakban az igen kényelmes és gazdaságos **Einstein-féle szabályt** követjük, mely szerint az ellentétes pozíciókban levő indexekre automatikusan összegezni kell 1-től n-ig, anélkül, hogy kiírnánk a szumma jelet. Tehát, így megismételve az előbbi formulákat,

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{p} = p_k \boldsymbol{f}^k, \qquad (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v}) = p_k v^k.$$

A $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések vektorterének bázisa $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}^k$, és az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés **koordinátái** vagy **komponensei** erre a bázisra vonatkozóan

$$L^k{}_i := (\boldsymbol{f}^k \mid \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_i), \tag{2}$$

és

$$\boldsymbol{L} = L^i{}_k \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}^k.$$

Hasonlóan, a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezések vektorterének bázisa $\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^k$. és az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés koordinátái (komponensei)erre a bázisra vonatkozóan

$$A_{ik} := (\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k),$$

és

$$\boldsymbol{A} = A_{ik}\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^k.$$

Értelemszerűen adódik ezután a $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezések koordinátázása is.

Bármely típusú lineáris leképezések koordinátázása $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ értékű lineáris bijekció. Egy lineáris leképezés koordinátáinak (komponenseinek) együttese egy $n \times n$-es **mátrix**. Itt is a „felső-alsó" indexek utalnak arra, mely típusú lineáris leképezés mátrixáról van szó.

1.5. Áttérési transzformációk

Vegyük a $\mathbf{V}$ eddig tekintett bázisán túl egy másik $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ bázisát, amelynek a duálisa $\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n$.

Ekkor (1) szerint

$$\mathbf{e}'_i = (\boldsymbol{f}^k \mid \mathbf{e}'_i)\boldsymbol{e}_k, \qquad \mathbf{e}_k = ((\boldsymbol{f}')^i \mid \mathbf{e}_k)\mathbf{e}'_i, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{f}')^i = ((\boldsymbol{f}')^i \mid \mathbf{e}_k)\boldsymbol{f}^k, \qquad \boldsymbol{f}^k = (\boldsymbol{f}^k \mid \mathbf{e}'_i)(\boldsymbol{f}')^i. \tag{4}$$

Az itt szereplő együtthatóknak szemléletes jelentése van. Nevezetesen, legyen $\boldsymbol{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ az a lineáris leképezés (bijekció), amelyet a $\boldsymbol{T}\mathbf{e}_i := \mathbf{e}'_i$ formula határoz meg. Ekkor (2) szerint $\boldsymbol{T}$ mátrixa az eredeti („vesszőtlen") bázisban

$$T^k{}_i = (\boldsymbol{f}^k \mid \mathbf{e}'_i),$$

az inverzének a mátrixa az új („vesszős") bázisban

$$(T')^i{}_k = ((\boldsymbol{f}')^i \mid \boldsymbol{e}_k).$$

Összevetve a formulákat

$$e'_i = (\boldsymbol{f}^k \mid \mathbf{e}'_i)((\boldsymbol{f}')^j \mid \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}'_j$$

adódik, amiből

$$(T')^j{}_k T^k{}_i = \delta^j{}_i. \tag{5}$$

A vektorok illetve kovektorok koordinátáira a

$$v^k\boldsymbol{e}_k = (v')^i\boldsymbol{e}'_i, \qquad \text{illetve} p_k\boldsymbol{f}^k = p'_k(\boldsymbol{f}')^i$$

egyenlőségek és a fentiek alapján

$$(v')^i = (T')^i{}_k v^k, \qquad p'_i = T^k{}_i p_k$$

áll fenn.

Ezért a kovektorok koordinátáit **kovariánsaknak** (magyarul: uganúgy változónak) szokás hívni, mert ugyanolyan szabály szerint transzformálódnak új bázisra való áttérésnél, mint a bázisvektorok; a vektorok koordinátáit pedig **kontravaránsaknak** szokás hívni, mert ellentétesen transzformálódnak. Sőt találkozhatunk a fizikusi irodalomban azzal, hogy a vektorokat kontravariáns vektoroknak mondják, a kovektorokat pedig kovariáns vektoroknak.

2. Tenzorok

2.1. Multilineáris leképezések

Egy $\boldsymbol{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezés a definíciója szerint olyan leképezés, amely bármely egyik változójának a rögzítése mellett a másik változójában lineáris.

A bilineáris leképezés **szimmetrikus**, ha változóinak sorrendjét megcserélve az értéke nem változik, és **antiszimmetrikus**, ha a változók sorrendcseréje az értékének előjelváltását eredményezi.

Hasonlóan értelmezhetők a $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$ és $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezések. A szimetrikusság, antiszimmetrikusság természetesen ezen három eset közül csak a harmadikban értelmes.

Egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés felfogható $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezésnek a $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) \mapsto (\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{L}\boldsymbol{u})$ meghatározással. Ez a megfeleltetés lineárs bijekció, amellyel **azonosítjuk** a szóban forgó lineáris leképezéseket és bilineáris leképezéseket.

Például $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}$ mint bilineáris leképezés

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p} : \mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}, \qquad (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) \mapsto (\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{v})(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{u})$$

módon hat.

Mint tudjuk, az ilyen tenzorszorzat alakú elemek kifeszítik a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések vektorterét, és ezzel együtt tehát a $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezések vektorterét.

Ez sugallja, hogy vezessük be a

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$$

szimbólumot a szóban forgó lineáris leképezések terének és a szóban forgó bilineáris leképezések terének közös jelölésére.

Értelemszerűen adódik

$$\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*, \quad \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$$

a $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris vagy $\mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$ bilienáris leképezések stb. összességének a jelölésére.

Ezeknek az elemeit rendre $(1,1)$ típusú, $(1,1)$ típusú, $(0,2)$ típusú és $(2,0)$ típusú **tenzoroknak** hívjuk.

Egy $\boldsymbol{A} \in \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$ ($(0,2)$ típusú) tenzorra mint $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezésre értelmeztük, mit jelent, hogy szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus. Ez egybeesik azzal, hogy mint $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezés szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus: $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{u})$.

A tenzorszorzásos jelölés igen hasznosan kiterjeszthető; például

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$$

– akár a $\mathbf{V} \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ lineáris,
– akár a $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ bilineáris,
– akár a $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ trilineáris

stb. leképezések összességét jelöli, amelyeket a

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}$$

elemmel rendre
– $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x})$,
– $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{y})(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x})$,
– $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mapsto (\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{v})(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{y})(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{x})$

jellemez.

$\mathbf{V}$-nek r-szeres és $\mathbf{V}^*$-nak s-szeres tenzorszorzatában lévő elemek ezek szerint méltán nevezhetők **multilineáris leképezéseknek**; pontosabb megjelölésként az (r,s) típusú **tenzorok** elnevezést használjuk. A fenti példában tehát $(1,2)$ típusú tenzor szerepelt.

Ennek értelmében, ha például $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés, azaz $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ elemei, akkor $\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{K}$ a $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ eleme, amelyet sok egyéb mellett felfoghatunk

– $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{K}\boldsymbol{y}$ lineáris leképezésnek.

Hasonlóan, $\boldsymbol{L}^* \otimes \boldsymbol{K}^*$ a $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}$ eleme, amelyet sok egyéb mellett felfoghatunk

– $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$, $\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{K}^*\boldsymbol{q}$ lineáris leképezésnek.

Adott bázis és duálisa mellett egy multilineáris leképezés is koordinátázható; a koordináták együttese „hipermátrixot" alkot. Például egy $\boldsymbol{R}$ $(1,3)$ típusú tenzor hipermátrixának komponensei a korábban szerepelt bázisokban

$$R^i_{klm} := \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_m).$$

2.2. Antiszimmetrikus tenzorok

Az $(r,0)$, illetve $(0,r)$ típusú tenzorokra – mint multineáris leképezésekre – értelmes a szimmetrikusság és antiszimmetrikusság fogalma: szimmetrikus, ha változói sorrendjének akármely változása mellett az értéke nem változik, antiszimmetrikus, ha a vátozók sorrendjének páros permutációja esetén az értéke nem változik, páratlan permutációja esetén pedig az értéke előjelet vált.

Az antiszimmerikus tenzorok nyilvánvalóan lineáris alteret alkotnak a megfelelő típusú tenzorok terében. Jelölésben a $\wedge$ szimbólummal utalunk az antiszimmetrikus tenzorok alterére. Tehát például $\mathbf{V}^* \wedge \mathbf{V}^*$ a $(0,2)$ típusú antiszimmetrikus tenzorok vektortere.

Ugyancsak a $\wedge$ szimbóliummal jelöljük (ko)vektorok **antiszimmetikus tenzorszorzatát**, amely a tényezők páros permutációjú tenzorszorzatának az összegéből levonva a páratlan permutációjú tenzorszorzatának az összege. Például két, illetve három kovektor antiszimmetrikus tenzorszorzata:

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} := \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{k} =& \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{p} \\ & - \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Ha egy ilyen szorzatban két elem sorrendjét felcseréljük, az eredeti szorzat negatívját kapjuk. Mivel $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p} = 0$, világos, hogy lineárisan összefüggő vektorok, illetve kovektorok antiszimmetrikus tenzorszorzata nulla.

Lévén legfeljebb n lineárisan független (ko)vektor, az r-antiszimmerikus tenzorok között annyi a maximális lineáris függetlenek száma, ahányféleképpen ki lehet választani r elemet n közül. Tehát az r-antiszimmetrikus tenzorok terének a dimenziója $\binom{n}{r}$ ha $0 \leq r \leq n$, és nulla, ha $r > n$.

Bármely $(0, r)$, illetve $(r, 0)$ típusú tenzor (ko)vektorok tenzorszorzatának lineáris kombinációja. Ezért értelmezhetjük az ilyenek **antiszimmetrizáltját** úgy, hogy az összegben szereplő tenzorszorzatokat az antiszimmetrikus tenzorszorzattal cseréljük ki.

2.3. Kontrakciók

Értelmezhető bármely $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés – másként $\boldsymbol{L} \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$, vagyis $\boldsymbol{L}$ $(1, 1)$ típusú tenzor – **nyoma**, amelyet $\mathrm{Tr}\boldsymbol{L}$ jelöl, úgy, hogy az $\boldsymbol{L} \mapsto \mathrm{Tr}\boldsymbol{L}$ hozzárendelés lineáris, és speciálisan

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}) := (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v})$$

Ha tehát $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ a $\mathbf{V}$ bázisa és $\boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^n$ annak a duálisa, akkor

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{f}^k \mid \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_k) = T^k{}_k,$$

vagyis $\boldsymbol{L}$ nyoma egyenlő **bármely mátrixában** a főátlóban levő komponensek összegével (az első egyenlőségnél még kiírtuk a szummajelet a jól láthatóság érdekében, a másodiknál mára alkalmaztuk az Einstein-szabályt).

A nyom hasonlóképp értelmezhető $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezésekre. Azonban $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ és $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ lineáris lekpezéseknek – $(0, 2)$ és $(2, 0)$ típusú tenzoroknak – **nincs nyoma**. Ilyen leképezések mátrixainak képezhető a nyoma a főátlóban levő komponensek összege), de ez **függ** a mátrixoktól.

A nyom kiterjesztéseként vezetjük be az (r, s) típúsú tenzorok különféle **kontrakcióit** $r \neq 0$ és $s \neq 0$ esetén. Például a $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{k}$ $(1, 3)$ típusú tenzornak a kontrakciói

$$(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{k}\boldsymbol{q}, \quad (\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{k}, \qquad (\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{v})\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{k}.$$

A kontrakciókat is lehet koordinátákban jellemezni. Például, az előbbieknek megfelelően egy $\boldsymbol{R}$ $(1,3)$ típusú tenzor kontrakcióinak koordinátákban való leírása

$$R^k_{klm}, \qquad R^l_{klm}, \qquad R^m_{klm}.$$

2.4. Determináns

Ugyancsak értelmezhető $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés **determinánsa** a következőképpen. Ha $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ a $\mathbf{V}$ bázisa, akkor $\boldsymbol{e}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_n$ az n-lineáris antiszimmetrikus tenzorok egy-dimenziós terének bázisa. Ezért $\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_n$ ennek a bázisnak számszorosa; ezt a számot nevezzük az $\boldsymbol{L}$ **determinánsának**:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_n = (\det \boldsymbol{L})\boldsymbol{e}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_n.$$

Megmutatható, hogy $\det \boldsymbol{L}$ független a bázis választásától és egyenlő **bármely mátrixának** a szokásos determinánsával.

A determináns ugyanúgy értelmes $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezésekre. Viszont $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ és $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ lineáris lekpezéseknek – $(0,2)$ és $(2,0)$ típusú tenzoroknak – **a determinánsa nem értelmes**. Természetesen, ilyen leképezések mátrixainak van determinánsa, de ez **függ** a mátrixoktól.

3. Pszeudo-euklideszi vektorterek

Legyen $\mathbf{V}$ véges n-dimenziós valós vektortér.

Egy $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezést – másképpen, egy $(0,2)$ típusú tenzort, azaz $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$ elemét **pszeudo-euklideszi szerkezetnek** hívunk, ha

– szimmetrikus,

– nem elfajuló, azaz ha $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ minden $\mathbf{x}$-re, akkor $\boldsymbol{y} = 0$.

Seciálisan, ha $\langle\ ,\ \rangle$ pozitív definit, azaz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$, ha $\mathbf{x} \neq 0$, akkor **euklideszi szerkezetről** vagy **skaláris szorzatról** beszélünk.

A skaláris szorzat tulajdonságai jól ismertek, azokra itt nem térünk ki.

Egy pszeudo-euklideszi szerkezethez mindig létezik **pszeudo-ortonormált bázis** azaz $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ vektorok úgy, hogy

$$\langle \boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_k \rangle = \eta_k \delta_{ik},$$

ahol $\eta_k = \pm 1$. Továbbá egyértelműen, a bázistól függetlenül létezik egy $0 \le p \le n$ természetes szám úgy, hogy $\eta_k > 0$, ha $k \le p$ és $\eta_k < 0$, ha $k > p$.

Lorentz-szorzásnak hívjuk a pszeudo-euklideszi szerkezetet, ha $p = 1$ vagy $p = n - 1$.

A pszeudo-euklideszi szerkezetek egyik legfontosab tulajdonsága, hogy

$$\mathbf{V} \to \mathbf{V}^* \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{x} \mid \cdot \rangle$$

lineáris bijekció, amelynek a segítségével egy vektort „természetes módon” felfoghatunk kovektornak, illetve egy kovektort vektornak; ezt így fejezzük ki:

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^* \qquad \boldsymbol{x} \equiv \langle \boldsymbol{x} \mid \cdot \rangle.$$

A $\mathbf{V}$ $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ pszeudo-ortonormált bázisának duálisa a fenti azonosítás szerint $\boldsymbol{f}^k := \eta_k \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$.

Az $\boldsymbol{x}$ vektornak a koordinátái egy ilyen pszeudo-ortonormált bázisban

$$x^k := (\boldsymbol{f}^k \mid \boldsymbol{x}) = \eta_k \langle \mathbf{e}_k \mid \mathbf{x} \rangle.$$

Ha $\boldsymbol{x}$-et kovektornak fogjuk fel, akkor a koordinátái

$$x_k := (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_k) = \langle \mathbf{x} \mid \boldsymbol{e}_k,$$

tehát

$$x_k = \begin{cases} x^k & \text{ha} \quad k \le p, \\ -x^k & \text{ha} \quad k > p. \end{cases}$$

MÁSODIK RÉSZ

AFFIN TEREK

4. Alapvető tulajdonságok

Egy **affin tér** egy $(\mathrm{V}, \mathbf{V}, -)$ hármas, ahol

- V nem üres halmaz,
- **V** vektortér,
- $-$ leképzés $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$-ről $\mathbf{V}$-re, amelyet
  $$(x, y) \mapsto x - y$$
  formában írunk,

és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
1) minden $o \in \mathrm{V}$ esetén az $O_o : \mathrm{V} \to \mathbf{V}$, $x \mapsto x - o$ hozzárendelés bijekció,
2) $(x - y) + (y - z) + (z - x) = \mathbf{0}$ minden $x, y, z \in \mathrm{V}$ esetén.

O_o szokásos neve: V-nek o **kezdőpontú (origójú) vektorizációja**.

A szokásnak megfelelően az affin teret egyetlen betűvel jelöljük, és azt mondjuk, V affin tér **V** fölött.

Speciálisan egy vektortér, a vektori kivonással, affin tér önmaga fölött.

A V affin tér **dimenziója** az alulfekvő **V** vektortér dimenziója.

Adott $o \in \mathrm{V}$ esetén, az O_o leképezés inverzét

$$\mathbf{V} \to \mathrm{V}, \qquad \mathbf{x} \mapsto o + \mathbf{x} \tag{6}$$

formában jelöljük.

Tehát, definíció szerint a V minden x, y elemére

$$y + (x - y) = x.$$

Jegyezzük jól meg:

– értelmes az összeg, a különbség és a számmal szorzás vektorok között, az eredmény vektor;

– értelmes a különbség két affin térbeli elem között, az eredmény vektor (nem értelmes az összeg és a számmal szorzás!),

– értelmes egy affin térbeli elem és egy vektor összege, az eredmény affin térbeli elem.

A jelölések úgy vannak meghatározva, hogy a szokásos műveleti szabályok érvényben maradjanak, amennyiben az elvégzett műveletnek van értelme.

Tehát például igaz, hogy $(x + \mathbf{x}) + \boldsymbol{y} = x + (\mathbf{x} + \boldsymbol{y})$ (az összeadás jele a bal oldalon kétszer a (**??**) műveletet jelöli, a jobb oldalon egyszer ezt a műveletet, egyszer a vektorok összeadását).

Ugyancsak igaz, hogy $(x-y)+(u-v)=(x-v)-(y-u)$, ezzel szemben $(x-y)+(u-v)=(x+u)-(y+v)$ nem helytálló, ugyanis a jobb oldalnak – affin térbeli elemek összegének – nincs értelme.

A fenti 1) és 2) tulajdonságból azonnal adódik, hogy minden $x, y \in \mathrm{V}$ esetén

- $x-y=\mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $x=y$,
- $x-y=-(y-x)$;

továbbá bármely $n \geq 3$ egész számra és a V-nek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemére

$$(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_1)=\mathbf{0}.$$

A V affin tér egy H részhalmazát **affin altérnek** hívjuk, ha van az alulfekvő $\mathbf{V}$ vektortérnek egy $\mathbf{H}$ lineáris altere úgy, hogy H a kivonás leszűkítésével affin tér $\mathbf{H}$ fölött.

A V_1 és V_2 affin tér Descartes-szorzata a tagonkénti kivonásssal affin tér $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{V}_2$ Descartes-szorzata fölött. Ez tetszőleges számosságú affin tér Descartes-szorzatára értelemszerűen igaz.

Fontos megjegyezni, hogy egy vektortér a vektori kivonással affin tér önmaga mögött; ezért, ami igaz affin térre, értelemszerűen igaz vektortérre is.

5. Affin leképezések

Legyen U és V affin tér az $\mathbf{U}$, illetve a $\mathbf{V}$ vektortér fölött.

Egy $L : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ leképezést **affinnak** hívunk, ha létezik egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$L(y)-L(x)=\boldsymbol{L}(y-x) \qquad (x, y \in \mathrm{V}).$$

Az $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezés egyértelmű. Azt mondjuk, hogy L affin leképezés $\boldsymbol{L}$ fölött. A fenti formula egyenértékű azzal, hogy

$$L(x+\mathbf{x})=L(x)+\boldsymbol{L}\mathbf{x} \qquad (x \in \mathrm{V}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}).$$

Nyilvánvaló, hogy lineáris leképezés – az affin tereknek tekintett vektorterek között – affin leképezés önmaga fölött.

Az L affin leképezés pontosan akkor injektív vagy szürjektív, ha $\boldsymbol{L}$ olyan; ha L bijekció, akkor L^{-1} affin leképezés $\boldsymbol{L}^{-1}$ fölött.

Affin altérnek affin leképezés általi képe affin altér; affin altérnek affin leképezés általi ősképe affin altér.

Speciálisan az L affin leképezés értékkészletében levő minden u esetén

$$\{x \in \mathrm{V} \mid L(x)=u\}=\overset{-1}{L}(\{u\})$$

affin altér az $\boldsymbol{L}$ magja fölött.

A $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ vektorterek mint affin terek között egy L affin leképezést egy $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$ és egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés határoz meg

$$L(\mathbf{x}) := \mathbf{a}+\boldsymbol{L}\mathbf{x}$$

alakban. Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{L}$ az L alatti lineáris leképezés, és $\mathbf{a}=L(\mathbf{0})$.

6. Differenciálás

6.1. Differenciálás affin terekben

Ismertnek tételezzük fel az analízis alapvető fogalmait: nyílt halmaz, zárt halmaz, konvergencia, folytonosság stb.

Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, vagyis ugyanazokat a nyílt halmazokat, zárt halmazokat, konvergens sorozatokat, folytonos függvényeket, stb. határozzák meg, ezért beszélhetünk ezekről norma konkrét megadása nélkül. Lineáris, bilineáris, multilineáris leképezések automatikusan folytonosak (véges dimenzió esetén!).

Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér, ordo : $\mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ olyan függvényt jelöl, amely

- definiálva van a $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$ egy környezetében,
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathrm{ordo}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{V}$-n adott valamely (tehát minden) $\|\cdot\|$ norma esetén.

Ha V affin tér a (véges dimenziós valós) $\mathbf{V}$ vektortér fölött, és $\|\ \|$ norma $\mathbf{V}$-n, akkor $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$ metrika V-n. Ezzel a V-n is beszélhetünk nyílt halmazokról, folytonosságról stb.

Legyen V és U affin tér. Egy $F : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ függvény **differenciálható** az értelmezési tartományának egy x belső pontjában, ha létezik egy $\mathrm{D}F(x) : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés – más szóval az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$ eleme – úgy, hogy

$$F(y) - F(x) = \mathrm{D}F(x)(y - x) + \mathrm{ordo}(y - x),$$

vagy ugyanez másképpen

$$F(x + \mathbf{x}) - F(x) = \mathrm{D}F(x)\mathbf{x} + \mathrm{ordo}(\mathbf{x}),$$

$\mathrm{D}F(x)$ az F **deriváltja** x-ben.

F **differenciálható**, ha differenciálható az értelmezési tartományának minden pontjában.

F **folytonosan differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathrm{V} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$, $x \mapsto \mathrm{D}F(x)$ függvény folytonos.

F **kétszer differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathrm{V} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$, $x \mapsto \mathrm{D}F(x)$ függvény differenciálható (aminek a fenti definíció szerint van értelme, hiszen a $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$ véges dimenziós vektortér). Az F második deriváltja x-ben, amelyet $\mathrm{D}^2F(x)$-szel jelölünk, az $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*) \otimes \mathbf{V}^* = \mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*)$ eleme.

Magasabb rendű diferenciálhatóság hasonlóan értelmezhető. Az F k-ik deriváltja x-ben, amelyet $\mathrm{D}^kF(x)$-szel jelölünk, az $\mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^*)^{\otimes k}$ eleme.

Végtelenszer differenciálhatónak mondjuk a függvényt, ha k-szor differenciálható minden k esetén.

Minthogy egy vektortér affin tér önmaga fölött, értelemszerűen U és/vagy V helyett $\mathbf{U}$ és/vagy $\mathbf{V}$ is vehető.

Affin leképezés differenciálható, a deriváltja minden pontban az alulfekvő lineáris leképezés. Ezért végtelenszer differenciálható, minden magasabb rendű deriváltja nulla.

6.2. Tenzormezők differenciálása

A V-n értelmezett és $\mathbb{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^*\otimes\mathbf{V}^*$ stb. értékű függvények (skalármezők, vektormezők, kovektormezők, tenzormezők, kotenzormezők, stb) külön figyelmet érdemelnek.

Az $f : \mathrm{V}\to\mathbb{R}$ függvény deriváltja $\mathrm{D}f : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{J} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}$ vektormező deriváltja $\mathrm{D}\boldsymbol{J} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{K} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*$ kovektormező deriváltja $\mathrm{D}\boldsymbol{K} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*\otimes\mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{G} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}$ tenzormező deriváltja $\mathrm{D}\boldsymbol{G} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^*$ függvény.

És így tovább: a D differenciálás formális kovektorként fogható fel, amellyel mintegy tenzoriálisan szorozzuk az eredeti függvényt. Sajnos a deriváltak megszokott jelölése nincs összhangban a tenzori jelölésekkel: a D szimbólumot a függvény jele elé írjuk, míg az eredmény hátulról való szorzásban jelentkezik.

Ezt a kellemetlenséget a következő jelöléssel oldjuk fel, az előbb bevezetett mezők esetén a deriváltaknak az $\boldsymbol{x}$ vektoron felvett értékére

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{J}(x) := \big(\mathrm{D}\boldsymbol{J}(x)\big)\boldsymbol{x}, \qquad \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{K}(x) := \big(\mathrm{D}\boldsymbol{K}(x)\big)\boldsymbol{x}$$

stb. Sőt az is előbukkan majd, hogy pontonként más és más vektorra alkalmazzuk a deriváltat, azaz adott egy $\boldsymbol{X}$ vektormező, és ekkor

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{J} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}, \qquad x\mapsto \mathrm{D}_{\boldsymbol{X}(x)}\boldsymbol{J}(x),$$

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{K} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*, \qquad x\mapsto \mathrm{D}_{\boldsymbol{X}(x)}\boldsymbol{K}(x),$$

stb.

A $\boldsymbol{J}$ vektormező deriváltjának az értékei $(1,1)$ típusú tenzormezők, ezért vehetjük az értékek nyomát, így kapjuk a vektormező **divergenciáját**:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J} := \mathrm{D}\cdot\boldsymbol{J} := \mathrm{V}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{D}\boldsymbol{J}(x)).$$

Értelemszerűen definiálhatjuk egy $\mathbf{G}$ tenzormezőnek is a divergenciáját a megfelelő kontrakcióval.

A $\boldsymbol{K}$ kovektormezőnek pedig vehetjük az **antiszimmetrikus derváltját**:

$$\mathrm{D}\wedge\boldsymbol{K} := (\mathrm{D}\boldsymbol{K})^* - \mathrm{D}\boldsymbol{K} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*\wedge\mathbf{V}^*,$$

azaz

$$(\mathrm{D}\wedge\boldsymbol{K})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{K}\mid\boldsymbol{y}) - \mathrm{D}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{K}\mid\boldsymbol{x}).$$

Értelemszerűen definiáljuk egy antiszimmetrikus kotenzormezőnek, egy $\mathbf{F} : \mathrm{V}\to\mathbf{V}^*\wedge\mathbf{V}^*$ függvénynek a $\mathrm{D}\wedge\mathbf{F}$ antiszimetrikus deriváltját, mint a deriváltjának az antiszimmetrizáltját.

7. Részsokaságok

7.1. Görbék

Legyen V affin tér, amelynek a dimenziója nagyobb 1-nél.

Definíció. *A* V *egy* C *részhalmaza* **egyszerű görbe***, ha létezik olyan* I *nyílt intervallum és olyan* $p : \mathrm{I} \to \mathrm{V}$ *függvény, amelyet a* C **paraméterezésének** *hívunk, hogy*

- *a* p *értékkészlete* C,
- p *folytonosan differenciálható, és* $\dot{p}(t) \neq \mathbf{0}$ *az értelmezési tartományában levő minden* t*-re,*
- p *injektív és* p^{-1} *folytonos.*

C **görbe***, ha minden pontjának van olyan környezete, amely egyszerű görbe.*

Itt $\dot{p} : \mathrm{I} \to \mathbf{V}$ a paraméterezés deriváltját jelöli.

Meg kell jegyeznünk, hogy egy adott görbe paraméterezése egyáltalán nem egyértelmű. Vegyük például a definícióban szereplő p paraméterezést, valamint egy J nyílt intervallumot, és egy olyan $\phi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ folytonosan differenciálható bijekciót, hogy ϕ^{-1} is folytonosan differenciálható legyen (persze sok ilyen ϕ létezik). A definíció alapján könnyen látható, hogy a $p \circ \phi : \mathrm{J} \to \mathrm{V}$ leképezés szintén paraméterezése lesz a C görbének.

Vegyük észre, azt nem követelhetjük meg, hogy p^{-1} differenciálható legyen, mert C egyetlen pontja sem belső pont. Viszont komponálva bármely paraméterezéssel már differenciálható függvényt kapunk:

Állítás. *Ha* $p : \mathrm{I} \to \mathrm{V}$ *és* $q : \mathrm{J} \to \mathrm{V}$ *a* C *görbe paraméterezései, akkor az* $S := p^{-1} \circ q : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ *függvény folytonosan differenciálható, és* $(\dot{p} \circ S)S' = \dot{q}$ *(itt* S' *az* S *deriváltját jelöli).*

Bizonyítás Az nyilvánvaló, hogy S folytonos, injektív és $q = p \circ S$. Ha tehát tudjuk, hogy S differenciálható, akkor fennáll az állított egyenlőség.

Legyen $t, s \in \mathrm{J}$ és $t \neq s$. Tekintsük a következő átalakítást:

$$\frac{q(t) - q(s)}{t - s} = \frac{p(S(t)) - p(S(s))}{t - s} = \frac{p(S(t)) - p(S(s))}{S(t) - S(s)} \frac{S(t) - S(s)}{t - s}.$$

Nem követtünk el semmi rosszat, hiszen $S(t) - S(s) \neq 0$, mivel S injektív. Az előbbi egyenlőségből kis átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\left| \frac{S(t) - S(s)}{t - s} \right| = \frac{\left| \frac{q(t) - q(s)}{t - s} \right|}{\left| \frac{p(S(t)) - p(S(s))}{S(t) - S(s)} \right|},$$

ahol $| \cdot |$ a bal oldalon az abszolútértéket, a jobb oldalon pedig a $\mathbf{V}$-n egy normát jelenti.

Tudjuk, hogy S folytonos, p és q pedig folytonosan differenciálható, következésképpen léteznek a

$$\lim_{t \to s} \frac{q(t) - q(s)}{t - s} = \dot{q}(s) \neq 0, \quad \lim_{t \to s} \frac{p(S(t)) - p(S(s))}{S(t) - S(s)} = \dot{p}(S(s)) \neq 0$$

határértékek, tehát létezik a

$$\lim_{t\to s}\left|\frac{S(t)-S(s)}{t-s}\right| = \frac{|\dot{q}(s)|}{|\dot{p}(S(s))|}$$

határérték is. S folytonos bijekció két intervallum között, ezért szigorúan monoton, így $\dfrac{S(t)-S(s)}{t-s}$ nem vált előjelet, tehát

$$S'(s) = \frac{|\dot{q}(s)|}{|\dot{p}(S(s))|} \quad \text{vagy} \quad S'(s) = -\frac{|\dot{q}(s)|}{|\dot{p}(S(s))|},$$

ami mutatja, hogy S' folytonos. □

Definíció. *Legyen x a* C *görbe eleme. A $\dot{p}(p^{-1}(x))$ vektorral párhuzamos vektorokat (más szóval a $\dot{p}(p^{-1}(x))$ számszorosait) a görbe x-beli* **érintővektorainak** *nevezzük; összességük az x fölötti* **érintőtér**.

Noha az érintővektorokat egy paraméterezéssel definiáltuk, függetlenek a paraméterezéstől: csak vissza kell emlékeznünk az előző állítás képletére, amelyből a $0 \neq \lambda(x) := S'(q^{-1}(x)) \in \mathbb{R}$ jelöléssel

$$\dot{q}\left(q^{-1}(x)\right) = \lambda(x)\dot{p}\left(p^{-1}(x)\right)$$

adódik.

Speciális görbe egy C egyenes (egydimenziós affin altér) V-ben, amely $x+\mathbf{C}$ alakú, ahol x a C tetszőleges pontja, és $\mathbf{C}$ egydimenziós lineáris altér $\mathbf{V}$-ben. Véve tetszőleges $\boldsymbol{c}$ elemet $\mathbf{C}$-ből, $\alpha \mapsto x+\alpha\boldsymbol{c}$ paraméterezése C-nek. Az egyenes minden pontjában az érintőtere $\mathbf{C}$.

Egy másik fontos speciális eset: egy $r : \mathbb{R} \to \mathrm{V}$ folytonsan differenciálható függvény grafikonja egyszerű görbe $\mathbb{R}\times\mathrm{V}$-ben, amelynek paraméterezése $t \mapsto p(t) := (t, r(t))$. Egyszerű ellenőrizni, hogy p valóban teljesíti az előírt követelményeket.

7.2. Közönséges differenciálegyenletek

Mind a matematikában, mind a fizikában fontos szerepet játszanak a közönséges differenciálegyenletek, amelyeket szemléletesen így fogalmazhatunk meg: az affin tér egy nyílt részhalmazának minden pontjában adva van egy vektor, és keressük azokat a görbéket, amelyeknek az érintői az előírt vektorok. Pontosan megfogalmazva: adott egy nyílt halmazon értelmezett $\boldsymbol{X} : \mathrm{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ folytonosan differenciálható vektormező, és keressük azokat a $r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathrm{V}$ folytonosan differenciálható függvényeket, amelyekre $\dot{r}(t) = \boldsymbol{X}(r(t))$ teljesül. Az ilyen egyenletet a

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathrm{V})? \qquad \dot{x} = \mathbf{X}(x) \tag{7}$$

szimbólummal jelöljük.

Tudjuk, hogy a differenciálegyenletnek adott kezdeti feltétel mellett egyértelmű maximális megoldása létezik. A megoldások grafikonja görbe $\mathbb{R}\times\mathrm{V}$-ben.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\boldsymbol{X}$ mindenütt értelmezve van és végtelenszer differenciálható. Jelölje $t \mapsto R(t,s)a$ azt a maximális megoldást, amely az s helyen az a értéket veszi fel, azaz

$$\frac{dR(t,s)a}{dt} = \mathbf{X}(R(t,s)a), \qquad R(s,s)a = a.$$

Az is ismert, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{V} \to V$, $(t,s,a) \mapsto R(t,s)a$ végtelenszer differenciálható. Speciálisan, rögzített t és s mellett a megoldások egyértelműsége miatt $R(t,s) : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ végtelenszer differenciálható injekció, és

$$R(s',t)R(t,s) = R(s',s) \qquad (s',s,t \in \mathbb{R}),$$

amiből $R(t,s)^{-1} = R(s,t)$.

7.3. Többdimenziós részsokaságok

Legyen V affin tér, amelynek az n dimenziója nagyobb 2-nél, és legyen m természetes szám, $1 \leq m \leq n$.

Definíció. *A* V *egy* M *részhalmaza* m-**dimenziós egyszerű részsokaság**, *ha létezik egy* $p : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathrm{V}$ *függvény, amelyet a* M **paraméterezésének** *hívunk, úgy, hogy*

- *a* p *értelmezési tartománya nyílt és összefüggő, értékkészlete* M,
- p *folytonosan differenciálható, és* $\mathrm{D}p(\xi)$ *injektív az értelmezési tartományában levő minden* ξ*-re,*
- p *injektív és* p^{-1} *folytonos.*

Jegyezzük meg a következőket:

(i) Mivel összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő, az egyszerű részsokaságok összefüggő halmazok.

(ii) Az $m = 1$ esetben visszakapjuk a görbe fogalmát. Az $(n-1)$-dimenziós egyszerű részsokaságot **hiperfelületnek** hívjuk.

(iii) Az n-dimenziós egyszerű részsokaságok az összefüggő nyílt halmazok. Ugyanis ha $p : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathrm{V}$ a definícióban adott tulajdonságú függvény, akkor az inverzfüggvény-tétel szerint $\mathrm{Ran}(p)$ nyílt. Ha viszont M összefüggő és nyílt halmaz V-ben, akkor bármely $K : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^n$ affin bijekció (koordinátázás) esetén $K^{-1}|_{K[\mathrm{M}]}$ a M paraméterezése.

(iv) A görbékhez hasonlóan itt is ki kell emelnünk, hogy egy egyszerű részsokaság paraméterezése nem egyértelmű. Ugyanis, ha p a M paraméterezése és $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ összefüggő halmazon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, amely injektív és az inverze is folytonosan differenciálható, továbbá $\mathrm{Ran}(\phi) = \mathrm{Dom}(p)$, akkor a $p \circ \phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail V$ függvény szintén paraméterezése lesz a M-nak (ϕ deriváltja minden pontban lineáris bijekció).

(v) Ha U véges dimenziós affin tér és $F : \mathrm{V} \rightarrowtail \mathrm{U}$ összefüggő halmazon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, amely injektív és az inverze is folytonosan differenciálható, továbbá M egyszerű részsokaság V-ben és $\mathrm{M} \cap \mathrm{Dom} F \neq \emptyset$, akkor $F[\mathrm{M}]$ is egyszerű részsokaság; ha p a M paraméterezése, akkor $F \circ p$ az $F[\mathrm{M}]$ paraméterezése (F deriváltja minden pontban lineáris bijekció).

Definíció. *A* V *egy* M *részhalmaza* m-**dimenziós részsokaság**, *ha minden x pontjának van olyan $G(x)$ környezete* V*-ben, hogy $G(x) \cap \mathrm{M}$ m-dimenziós egyszerű részsokaság; egy ilyennek a paraméterezését a* M **lokális paraméterezésének** *hívjuk.*

Egy lokális paraméterezés inverzét **lokális koordinátázásnak** *nevezzük.*

Állítás. *Ha* T *m-dimenziós affin tér,* S *véges dimenziós affin tér, $h : \mathrm{T} \rightarrowtail \mathrm{S}$ összefüggő halmazon értelmezett folytonosan differenciálható, akkor h grafikonja m-dimenziós egyszerű részsokaság $\mathrm{T} \times \mathrm{S}$-ben, amelynek p paraméterezését egy $A : \mathbb{R}^m \to \mathrm{T}$ affin bijekcióval az $A^{-1}(\mathrm{Dom} h)$ halmazon értelmezett $\xi \mapsto (A\xi, h(A\xi))$ formulával adhatjuk meg.*

Bizonyítás Az állításban szereplő p teljesíti a paraméterezésre kirótt feltételeket, hiszen

- $\mathrm{Dom}(p)$ összefüggő és nyílt,
- p folytonosan differenciálható,
- $\mathrm{D}p(\xi) = (A, \mathrm{D}h(A\xi)A)$ injektív minden $\xi \in \mathrm{Dom}(p)$ esetén;
- p injektív, és az inverze folytonos, mert $p^{-1}(t, s) = A^{-1}(t)$, ha (t, s) a h grafikonjának az eleme.

$\square$

Állítás. *Legyen* U *$n-m$-dimenziós valós affin tér, $F : \mathrm{V} \rightarrowtail \mathrm{U}$ folytonosan differenciálható és $c \in \mathrm{Ran}(F)$. Ha a $\mathrm{D}F(x) : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés szürjekció minden $x \in \overset{-1}{F}(\{c\})$ pontban, akkor $\overset{-1}{F}(\{c\})$ m-dimenziós részsokaság.*

Bizonyítás Legyen $a \in \overset{-1}{F}(\{c\})$ tetszőleges. Mivel $\dim(\mathrm{V}) = n$ és $\mathrm{D}F(x)$ ráképezés, $\mathbf{T} := \mathrm{Ker}(\mathrm{D}F(x))$ m-dimenziós lineáris altér $\mathbf{V}$-ben. Ha $\mathbf{S}$ ennek egy kiegészítő altere, azaz $\mathbf{T} \cap \mathbf{S} = \{0\}$ és $\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{V}$, akkor $\dim(\mathbf{S}) = n - m$, továbbá $\mathrm{D}F(x)$ leszűkítése $\mathbf{S}$-re bijekció $\mathbf{S}$ és $\mathbf{U}$ között.

A $\mathrm{T} := x + \mathbf{T}$ és $\mathrm{S} := x + \mathbf{S}$ affin alterekkel $\mathrm{T} \times \mathrm{S} \to \mathrm{V}$, $(t, s) \mapsto x + (t - x) + (s - x)$ affin bijekció ezért az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy $\mathrm{V} = \mathrm{T} \times \mathrm{S}$, és az alulfekvő vektortér $\mathbf{V} = \mathbf{T} \times \mathbf{S}$. Ekkor az, hogy $\mathrm{D}F(x)$ mondott leszűkítése bijekció pontosan azt jelenti, hogy F-nek a második változó szerinti parciális deriváltja x-ben bijektív. Alkalmazhatjuk tehát az implicitfüggvénytételt, miszerint létezik olyan $G(x) \in \mathrm{V}$ (összefüggő) nyílt környezete az x pontnak, hogy $G(x) \cap \overset{-1}{F}(\{c\})$ egy $h_c : \mathrm{T} \rightarrowtail \mathrm{S}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonja, azaz minden $t \in \mathrm{T} \cap G(x)$ pontra

$$S(t, h_c(t)) = c.$$

Az előző állítás alapján tehát $\overset{-1}{F}(\{c\})$ tetszőleges pontjának van olyan környezete amely egyszerű részsokaság, tehát ez a szinthalmaz valóban részsokaság. □

Felhívjuk a figyelmet, hogy ugyanúgy, mint görbék esetén, egy paraméterezés inverzétőtől nem követelhetjük meg, hogy differenciálható legyen; de ugyanúgy, mint ott, egy paraméterezés inverze komponálva bármely paraméterezéssel már differenciálható. Sajnos azonban ennek a bizonyítása meglehetősen bonyolult és hosszadalmas; minthogy a részsokaságokra vonatkozó ismeretek itt csak a differenciálható sokaságok elméletének bevezető szemléltetésére szolgálnak, ezt a bizonyítást elhagyjuk.

Állítás. *Ha p és q egy $\mathrm{M} \in \mathrm{V}$ m-dimenziós részsokaság két paraméterezése, akkor $p^{-1} \circ q : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható, és minden $x \in \mathrm{Ran}(p) \cap \mathrm{Ran}(q)$ esetén*

$$D(p^{-1} \circ q)(q^{-1}(x)) = \big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big)^{-1}\, \mathrm{D}q(q^{-1}(x)).$$

Vegyük észre, hogy a fenti formula szerint a $\mathrm{D}p^{-1}(x) := \big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big)^{-1}$ formális definícióval érvényben marad a $p^{-1} \circ q$ kompozíció deriváltjára vonatkozó képlet.

Az iménti állítás feltételei teljesen szimmetrikusak p-ben és q-ban, tehát – a szerepüket megcserélve – a $(p^{-1} \circ q)^{-1} = q^{-1} \circ p$ függvény is folytonosan differenciálható. Ebből következik, hogy $p^{-1} \circ q$ deriváltja minden pontban $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineáris bijekció.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy a dimenzió egy részsokaság „belső" tulajdonsága, vagyis egy m-dimenziós részsokaság nem lehet egyben m'-dimenziós is, ha $m \neq m'$. Ugyanis az előbbieket elismételhetjük úgy, hogy $\mathrm{Dom}(p) \in \mathbb{R}^m$ és $\mathrm{Dom}(q) \in \mathbb{R}^{m'}$, és azt kapjuk, hogy létezik egy $\mathbb{R}^{m'} \to \mathbb{R}^m$ lineáris bijekció.

Állítás. *Legyen p és q egy $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$ részsokaság két paraméterezése, $x \in \mathrm{Ran}(p) \cap \mathrm{Ran}(q)$. Ekkor*

$$\mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big) = \mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}q(q^{-1}(x))\big).$$

Bizonyítás Az előző állítás formulája szerint fennáll a $\mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big) \supset \mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}q(q^{-1}(x))\big)$ összefüggés. A p és q szerepének cseréjével a másik irányú tartalmazás is igaz. □

Eredményünk biztosítja számunkra, hogy értelmes a következő meghatározás.

Definíció. *Egy $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$ m-dimenziós részsokaság x pontjában az* **érintőtér** *a $T_x(\mathrm{M}) := \mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big) \subset \mathbf{V}$ m-dimenziós lineáris alteret nevezzük, ahol p a M egy paraméterezése az x egy környezetében.*

Ha $\mathrm{M} = \overset{-1}{F}(\{c\})$, akkor $T_x(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}F(x))$. Ugyanis a részsokaság bármely p paraméterezésére $F \circ p : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathrm{U}$ folytonosan differenciálható függvény és mindenhol a c értéket veszi föl, tehát konstans, így a deriváltja minden pontban az azonosan nulla lineáris leképezés, azaz a részsokaság minden x elemére

$$\mathrm{D}(F \circ p)(p^{-1}(x)) = \mathrm{D}F(x)\mathrm{D}p(p^{-1}(x)) = 0.$$

Ebből rögtön következik, hogy $\mathrm{Ran}\big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\big) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{D}F(x))$, ami nekünk elég, hiszen mindkét oldalon m-dimenziós altér áll, így szükségképpen egyenlők.

Ha p egy $1 < m$-dimenziós részsokaság paraméterezése és $p(\xi_1, \dots, \xi_m) = x$, akkor az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathrm{V}$, $t \mapsto p(t, \xi_2, \dots, \xi_m)$ függvény értékkészlete egy görbe, amely „áthalad" x-en, és az érintője x-ben a $\partial_1 p(p^{-1}(x))$ vektor az érintőtér eleme. Hasonló mondható a többi paricális deriváltról is. Így az érintőtér egy bázisát kapjuk a p paraméterezéssel az $\mathbb{R}^m$ $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ standard bázisából:

$$\partial_k p(p^{-1}(x)) = \mathrm{D}p(p^{-1}(x))\boldsymbol{e}_k \qquad (k = 1, \dots, m).$$

Kiemeljük, hogy az érintőtér független a definíciójában szereplő paraméterezés választásától, a megadott bázis azonban függ tőle.

7.4. Differenciálás részsokaságokon

Ha $m < n$, akkor egy m-dimenziós részsokaságnak egyetlen pontja sem belső pont, ezért az eredeti értelmezés szerint nem beszélhetünk arról, hogy egy, a részsokaságon értelmezett, affin tér értékű függvény differenciálható.

Definíció. *Legyen* $\mathrm{M} \subset \mathrm{V}$ *m-dimenziós részsokaság és* U *affin tér. Azt mondjuk, hogy az* $f : \mathrm{M} \rightarrowtail \mathrm{U}$ *függvény* **differenciálható az** $x \in \mathrm{Dom}(f)$ **pontban***, ha minden* $p : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathrm{M}$, $x \in \mathrm{Ran}(p)$ *paraméterezés esetén az* $f \circ p : \mathbb{R}^m \to \mathbf{U}$ *függvény differenciálható a* $p^{-1}(x)$ *pontban.*

Értelemszerűen bevezethetjük azokat a fogalmakat, hogy a függvény differenciálható egy halmazon, folytonosan differenciálható, stb.

Előző erdményeink alapján elég, ha a függvény **egyetlen** p paraméterezéssel komponálva differenciálható függvényt ad. Ugyanis ekkor bármely q paraméterezésre $f \circ q = (f \circ p) \circ (p^{-1} \circ q)$ differenciálható.

Állítás. *Legyen* $f : \mathrm{M} \rightarrowtail \mathrm{U}$ *differenciálható az* $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban. Ha* p *és* q *olyan paraméterezés, hogy* $x \in \mathrm{Ran}(p) \cap \mathrm{Ran}(q)$*, akkor*

$$[\mathrm{D}(f \circ p)](p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1} = [\mathrm{D}(f \circ q)](q^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}q(q^{-1}(x))\right)^{-1}.$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}(f \circ q)](q^{-1}(x)) =&[\mathrm{D}(f \circ p \circ (p^{-1} \circ q))](q^{-1}(x)) = \\ =&[\mathrm{D}(f \circ p)](p^{-1}(x))[\mathrm{D}(p^{-1} \circ q)](q^{-1}(x));\end{aligned}$$

ezután már csak a $p^{-1} \circ q$ deriváltjára vonatkozó összefüggésünket kell alkalmazni, hogy megkapjuk a kívánt egyenlőséget.

Definíció. *Ha* $f : \mathrm{M} \rightarrowtail \mathrm{U}$ *differenciálható az* $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban, akkor az* x*-beli deriváltján a*

$$\mathrm{D}f(x) := [\mathrm{D}(f \circ p)](p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1} : T_x(\mathrm{M}) \to \mathbf{U}$$

lineáris leképezést értjük, ahol p *tetszőleges olyan paraméterezés, amelyre* $x \in \mathrm{Ran}(p)$.

A részsokaságon értelmezett függvények differenciálhatóságának értelmezése szerint egy p paraméterezés inverze is differenciálható, hiszen bármely q paraméterezés esetén $p^{-1} \circ q$ differenciálható. A függvény deriváltjának értelmezése szerint pedig a korábbi, p^{-1}-re vonatkozó megjegyzésünkből törölhető a „formális definícióval".

Előfordulhat, hogy egy bővebben értelmezett függvénynek a részsokaságra vett leszűkítéséről van szó. Ha $F : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ differenciálható az $x \in \mathrm{M}$ pontban, akkor $F|_\mathrm{M}$ is differenciálható x-ben, és

$$\mathrm{D}(F|_\mathrm{M})(x) = \mathrm{D}F(x)|_{T_x(\mathrm{M})}.$$

Ugyanis a M bármely p paraméterezésére $F|_\mathrm{M} \circ p = F \circ p$, ezért $F|_\mathrm{M}$ differenciálható x-ben. Tovább a definíció szerint

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(F|_\mathrm{M})(x) =& \mathrm{D}(F|_\mathrm{M} \circ p)(p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1} = \\ =& \mathrm{D}F(x)\left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1}\right) = \mathrm{D}F(x)|_{T_x(\mathrm{M})};\end{aligned}$$

az utolsó egyenlőség azért igaz, mert előte a nagy zárójelen belül $T_x(\mathrm{M})$ identitása áll.

7.5. Többszörös differenciálhatóság

Legyen $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Egy részsokságot C^k-részsokaságnak hívunk, ha van k-szor folytonosan differenciálható paraméterezése. Ebben a megfogalmazásban tehát eddig a C^1-részsokaságokat tekintettük. Természetesen egy C^k-részsokaság egyben C^l-részsokaság is minden $1 \leq l \leq k$ esetén.

Ha a sokaság C^k-sokaság, akkor azt is definiálhatjuk minden $1 \leq l \leq k$ esetén, hogy egy, a sokaságon értelmezett, affin tér értékű f függvény l-szer differenciálható (egy pontban, egy halmazon, folytonosan): ha egy l-szer folytonosan differenciálható p paraméterezésre $f \circ p$ l-szer diffrenciálható stb. Sajnos azonban $m < n$ esetén az f magasabb rendű deriváltjait csak igen körülményesen lehet értelmezni, és az eddgi fogalmaink nem is elegek hozzá.

8. Vektorok új szerepben

8.1. Affin tér vektorai

Legyen x egy V affin tér eleme, és jelölje $\mathcal{D}(x)$ azon $\mathrm{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyek értelmezve vannak az x valamely nyílt környezetén, és végtelenszer differenciálhatók. Nyilvánvaló, hogy ha $f, g \in \mathcal{D}(x)$, akkor $f+g$ és fg, értelmezve a $\mathrm{Dom}f \cap \mathrm{Dom}g$ halmazon, szintén a $\mathcal{D}(x)$ eleme.

Definíció. *Egy $L^x : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{R}$ leképezést x-**beli derivációnak** hívunk, ha*

- *$\mathbb{R}$-lineáris, azaz $L^x(\alpha f + \beta g) = \alpha L^x(f) + \beta L^x(g)$,*
- *teljesíti a Leibnitz-szabályt, azaz $L^x(fg) = L^x(f)g(x) + f(x)L^x(g)$*

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $f, g \in \mathcal{D}(x)$ esetén.

Az x egy környezetében konstans függvényt bármely deriváció a nullába képezi; ugyanis a linearitás miatt $L^x(\alpha\alpha) = \alpha L^x(\alpha)$, a szorzat deriválója alapján pedig $L^x(\alpha\alpha) = L^x(\alpha)\alpha + \alpha L^x(\alpha)$.

Világos, hogy egy deriváció számszorosa és két deriváció összege is deriváció, vagyis a derivációk vektorteret alkotnak.

Egy f függvénynek az x-beli deriváltja $\mathrm{D}f(x) : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, tehát $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ esetén $\big(\mathrm{D}f(x)\big)\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Megjegyezzük, ez nem más, mint f-nek az x-beli $\mathbf{x}$ irányú deriváltja, és egy korábban bevezetett jelöléssel is:

$$\big(\mathrm{D}f(x)\big)\mathbf{x} = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}f(x) = \frac{df(x+t\mathbf{x})}{dt}|_{t=0}.$$

A függvények szorzatára vonatkozó ismert differenciálási szabály szerint azonnal adódik, hogy

$$L^x_{\mathbf{x}} : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{x}}f(x)]$$

x-beli deriváció minden $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ esetén.

Állítás. *A $\mathbf{V} \to \{x\text{-beli derivációk}\}$, $\mathbf{x} \mapsto L^x_{\mathbf{x}}$ hozzárendelés lineáris bijekció.*

Bizonyítás A meghatározásból nyilvánvaló, hogy a hozzárendelés lineáris, és injektív is, hiszen $L^x_{\mathbf{x}} = 0$ akkor és csak akkor nulla, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Azt kell csak belátnunk tehát, hogy minden deriváció valamely vektorból származtatható az adott módon.

Vegyünk egy $u : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^n$ végtelenszer differenciálható injekciót, amelynek az inverze is végtelenszer differenciálható. Ekkor $\mathrm{D}u(x) : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ lineáris bijekció. Tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{D}f(x)\big)\mathbf{x} =& \big(\mathrm{D}(f \circ u^{-1} \circ u)(x)\big)\mathbf{x} = \big[\mathrm{D}(f \circ u^{-1} \circ)\big](u(x))\big]\big[\mathrm{D}u(x)\big]\mathbf{x} = \\ =& \sum_{k=1}^{n} \partial_k\big(f \circ u^{-1}\big)(u(x))\big([\mathrm{D}u(x)]\mathbf{x}\big)^k,\end{aligned}$$

ahol az utolsó szimbólum az $\mathbb{R}^m$ szóban forgó vektorának a k-ik komonensét jelöli, $f \circ u^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható, és a nulla körüli másodrendű Taylor-formula szerint, az x egy környezetében levő y-okra

$$\begin{aligned}f(y) =& (f \circ u^{-1})(u(y)) = \\ =& f(x) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k\big(f \circ u^{-1}\big)(u(x))u(y)^k + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_i\partial_k\big(f \circ u^{-1}\big)(\eta(y))u(y)^i u(y)^k,\end{aligned}$$

ahol $\eta(y)$ az $\mathbb{R}^n$ $u(x)$ és $u(y)$ közötti szakaszának egy eleme.

Alkalmazzunk az $y \mapsto f(y)$ függvényre egy L^x derivációt. A jobb oldalon az első tag konstans, a harmadik pedig három tényezős szorzatok összege, ahol a tényezők közül kettő a nulla értéket veszi fel x-ben, ezért ezeket a deriváció nullába képezi. Az eredmény tehát

$$L^x(f) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \big(f \circ u^{-1}\big)(u(x)) L^x(u^k). \tag{8}$$

Mivel van egy (és csak egy) olyan $\mathbf{x}$ vektor, amelyre $\big([\mathrm{D}u(x)]\mathbf{x}\big)^k = L^x(u^k)$ $(k = 1, \ldots n)$, beláttuk, amit akartunk. □

Eredményünk szerint tehát egy vektort felfoghatunk az affin tér bármely pontjához tartozó derivációként, és viszont. Pontosabban, az affin tér bármely pontjához tartozó derivációkat azonosíthatjuk az alulfekvő vektortér elemeivel.

8.2. Részsokaság érintővektorai

Legyen M C^∞-részsokaság egy affin térben, $x \in \mathrm{M}$. Jelölje $\mathcal{D}(x, \mathrm{M})$ azon $\mathrm{M} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyek értelmezve vannak az x valamely nyílt környezetének M-val való metszetén, és végtelenszer differenciálhatók a **??** alfejezet értelmében. Nyilvánvaló, hogy ha $f, g \in \mathcal{D}(x, \mathrm{M})$, akkor $f + g$ és fg, értelmezve a $\mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$ halmazon, szintén a $\mathcal{D}(x, \mathrm{M})$ eleme.

Definíció. *Egy $L^{x,\mathrm{M}} : \mathcal{D}(x, \mathrm{M}) \to \mathbb{R}$ leképezést* **x-beli derivációnak** *hívunk a* M *részsokaságon, ha*

- *$\mathbb{R}$-lineáris, azaz $L^{x,\mathrm{M}}(\alpha f + \beta g) = \alpha L^{x,\mathrm{M}}(f) + \beta L^{x,\mathrm{M}}(g)$,*
- *teljesíti a Leibnitz-szabályt, azaz $L^{x,\mathrm{M}}(fg) = L^{x,\mathrm{M}}(f)g(x) + f(x)L^{x,\mathrm{M}}(g)$*

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $f, g \in \mathcal{D}(x, \mathrm{M})$ esetén.

Itt is igaz, hogy az x egy környezetében konstans függvényt bármely deriváció a nullába képezi. Az is világos, hogy egy deriváció számszorosa és két ilyen deriváció összege is deriváció, vagyis a derivációk vektoret alkotnak.

Egy f függvénynek a deriváltja az x pontban a 7.4 alfejezet alapján a $\mathrm{D}f(x) : T_x(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés. Legyen p a részsokaság olyan paraméterezése, hogy $x \in \mathrm{Ran} p$. Ekkor a derivált értelmezése szerint

$$\mathrm{D}f(x) = [\mathrm{D}(f \circ p](p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1}. \tag{9}$$

A függvények szorzatára vonatkozó ismert differenciálási szabályból azonnal adódik, hogy

$$L^{x,\mathrm{M}}_{\mathbf{x}} : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto [\mathrm{D}f(x)]\mathbf{x} \tag{10}$$

x-beli deriváció minden $\mathbf{x} \in T_x(\mathrm{M})$ esetén. es

Állítás. *A $T_x(\mathrm{M}) \to \{x\text{-beli derivációk } \mathrm{M}\text{-}n\}$, $\mathbf{x} \mapsto L^x_{\mathbf{x}}$ hozzárendelés lineáris bijekció.*

Bizonyítás A meghatározásból nyilvánvaló, hogy a hozzárendelés lineáris, és injektív is, hiszen $L_{\mathbf{x}}^{x,\mathrm{M}} = 0$ akkor és csak akkor nulla, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Azt, hogy minden deriváció valamely vektorból származtatható az adott módon, az előbbiek mintájára az $u := p^{-1}$ jel bevezetésével az $f \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény Taylor-formulájával mutathatjuk meg. Csak azt kell figyelembe vennünk, hogy az előbbiekben szereplő $\mathrm{D}u(x)$-nek most nincs értelme, viszont az ottani lehetőség szerint $\mathrm{D}u(x) = \left(\mathrm{D}u^{-1}(u(x))\right)^{-1}$, és ez utóbbi már itt is értelmes mennyiség szerepel a formulákban. $\square$

Eredményünk szerint tehát az x-beli érintőtér egy vektorát felfoghatjuk a részsokaság x pontjához tartozó derivációként, és viszont. Pontosabban, a részsokaság x pontjához tartozó derivációkat azonosíthatjuk az x-beli érintőtér vektoraival.

HARMADIK RÉSZ

DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

9. Térképek, atlasz

9.1. Alapvető definíciók

Ismerni kell a topológia alapfogfalmait, rájuk vonatkozó mélyebb tudás nélkül.

Egy topologikus tér egy nem müres halmaz, amelyen adott a nyílt halmazok összessége (a topológia) úgy, hogy az üres halmaz, az egész halmaz nyílt, valamint véges sok nyílt halmaz metszete és akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt.

Két toplogikus tér közötti függvény folytonos, ha minden nyílt halmaz őseképe folytonos.

Definíció. *Legyen M topologikus tér, m természetes szám. Egy (U, u) párt az M egy m-dimenziós* **térképének** *nevezzük, ha*

- *U az M összefüggő, nyílt, nem üres részhalmaza,*
- *$u : U \to \mathbb{R}^m$ folytonos injekció, amelynek az inverze is folytonos.*

u-t az U **koordinátázásának** is mondjuk.

A definíció következtében u értékészlete az $\mathbb{R}^m$ összefüggő, nyílt, nem üres részhalmaza. Visszaemlékezve az affin térbeli részsokaságokra, u az ottani paraméterezés inverzének felel meg. Itt sajnos semmiféle differenciálhatóság se jöhet szóba u-ra vagy az inverzére. Viszont ami ott állításként szerepelt, nevezetesen, hogy $p^{-1} \circ q$ differenciálható, azt itt definíció rangjára emeljük.

Definíció. *Az M (U, u) és (V, v) térképe* **kompatibilis**, *ha $v \circ u^{-1}$ és $u \circ v^{-1}$ végtelenszer differenciálható. A két térkép* **azonos irányítású** *ha $v \circ u^{-1}$ és $u \circ v^{-1}$ deriváltjának a determinánsa pozitív.*

Mivel az üres függvény minden tulajdonsággal bír (tehát végtelenszer differenciálható is, deriváltjának a determinánsa pozitív), ha $U \cap V = \emptyset$, akkor a két térképet kompatibilisnek és azonos irányításúnak vesszük.

Megjegyzendő, hogy a definícióban elég volna csak az egyik függvényt szerepeltetni: ha $U \cap V \neq \emptyset$, akkor $v \circ u^{-1}$ végtelenszer differenciálhatósága maga után vonja, hogy v képtere is szükségszerűen $\mathbb{R}^m$, és az inverzfüggvény-tétel értelmében $u \circ v^{-1}$ is végtelenszer differenciálható. $u \circ v^{-1}$ deriváltja a $v \circ u^{-1}$ deriváltjának az inverze, és determinánsa az előző determinánsának a reciproka.

A továbbiakban „differenciálható” mindig „végtelenszer differenciálhatót” jelent.

Definíció. *Legyen I valamely halmaz („indexhalmaz”). Az (U_a, u_a) $(a \in I)$ térképek összessége az M egy* **atlasza**, *ha*

- $M = \bigcup_{a \in I} U_a$,
- (U_a, u_a) *és* (U_b, u_b) *kompatibilis minden* $a, b \in I$ *esetén.*

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy M összefüggő. Ekkor egy atlaszában minden térkép ugyanannyi dimenziós kell legyen.

Ha egy atlaszhoz hozzáveszünk egy vele (vagyis az atlasz minden térképével) kompatibilis térképet, ismét atlaszt kapunk, amely – nyilvánvaló értelemben – bővebb az előzőnél. Egy atlaszhoz hozzávéve az összes lehetséges vele kompatibilis térképet egy **maximális atlaszt** kapunk.

Definíció. Differenciálható sokaságon *egy topologikus teret és rajta adott maximális atlaszt értünk. A differenciálható sokaság dimenziója a térképeinek a dimenziója.*

Ahhoz, hogy a sokasággal kapcsolatos egyes fogalmak „jól működjenek", fel kell tenni a sokaság topologiájáról bizonyos „jó tulajdonságokat" (például T_2 és M_2), de ezekbe a részletekbe mi nem mélyedünk el.

Egy atlasz egyértelműen meghatároz egy maximális atlaszt; tehát egy differenciálható sokaság megadásához elég megadni egy atlaszt. A sokaság fogalmának definíciójában azonban nem elég megkövetelni egy akármilyen atlaszt, mert akkor egy topologikus tér két különböző atlasszal, amelyek ugyanazt a maximális atlaszt határozzák meg, két különböző sokaság volna.

A továbbiakban differenciálható sokaság helyett egyszerűen csak sokaságot mondunk.

Definíció. *Egy sokaság* **irányítható**, *ha van azonos irányítású térképekből álló atlasza.*

Ha a sokaság iráyítható, van azonos irányítású térképekből álló maximális atlasza. Egy ilyen atlaszt a sokaság egy **irányításának** hívunk.

Egy M sokaság G nyílt részhalmaza, ellátva a relatív topológiával, és az M egy (U_a, u_a) $(a \in I)$ maximális atlaszából származó $(U_a \cap G, u_a|_G)$ $(a \in I, U_a \cap G \neq \emptyset)$ maximális atlasszal, az M-mel azonos dimenziójú sokaság.

9.2. Példák

Világos, hogy egy affin térbeli részsokaság, ahogy korábban értelmeztük, sokaság az itteni definíció szerint. Ha p a részokaság egy paraméterezése, akkor $(\mathrm{Ran} p, p^{-1})$ egy térkép; az ilyen térképek kompatibilisek, és atlaszt alkotnak.

Egy másik, a fizikában is fontos speciális típusú sokaság egy mechanikai rendszer folyamatainak (mozgásainak), egy közönséges differenciálegyenlet, a Newton-egyenlet megoldásainak összessége. A másodrendű Newton-egyenlet átírható elsőrendűvé, ezért alkalmazhatók rá a következők. Még csak annyi megjegyzést teszünk, hogy az egyszerűség kedvéért itt tárgyaltak akkor alkalmazhatók a mechanikára, ha a ható erők mindenütt értelmezve vannak és végtelenszer differenciálhatók. Az általános eset némi bonyodalommal hasonlóképp tárgyalható.

Tekintsünk egy $\mathbf{X} : \mathrm{V} \to \mathbf{V}$ végtelenszer differenciálható vektormezőt és használjuk 7.2. jelöléseit. Tudjuk, hogy ha $H \subset \mathrm{V}$ nyílt halmaz, akkor minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén $R(t,s)[H] \subset \mathrm{V}$ szintén nyílt halmaz.

Legyen M a (7) differenciálegyenlet maximális megoldásainak az összessége. Egy ilyen megoldást szemléletesen a grafikonjával, $\mathbb{R} \times \mathrm{V}$-beli görbével képzelhetünk el.

Adjunk meg topológiát M-en a következőképpen. Minden $t \in \mathbb{R}$ és $G \subset \mathrm{V}$ nyílt halmaz esetén legyen

$$N_{t,G} := \{r \in M \mid r(t) \in G\}$$

nyílt halmaz. Mivel

$$\begin{aligned} N_{t,G} \cap N_{s,H} &= \{r \in M \mid r(t) \in G, r(s) \in H\} = \\ &= \{r \in M \mid r(s) \in H, R(t,s)r(s) \in G\} = N_{t,G\cap R(t,s)[H]}, \end{aligned}$$

az adott típusú véges sok halmaz metszete is adott típusú, ezek az M toplogiájának a bázisát alkotják (vagyis az ilyenek összes lehetséges uniója adja az M toplógiáját).

A $z_t : M \to \mathrm{V}$, $r \mapsto r(t)$ jelöléssel $z_t \circ z_s^{-1} = R(t,s) : \mathrm{V} \rightarrowtail \mathrm{V}$ végtelenszer differenciálható. Ha tehát $A : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges affin bijekció, akkor az

$$(U_t, u_t) := (N_{t,\mathrm{V}}, A \circ z_t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

atlasszal definiáljuk M differenciálható struktúráját.

10. Differenciálható fügvények

Definíció. *Legyen M m-dimenziós és N n-dimenziós sokaság. Egy $F : M \rightarrowtail N$ függvény* **differenciálható***, ha az M bármely (U,u) térképe és az N bármely (V,v) térképe esetén $v \circ F \circ u^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ differenciálható.*

Egy $F : M \rightarrowtail N$ függvény differenciálható az $x \in \mathrm{Dom}F$ pontban, ha létezik az x-nek egy $G \subset \mathrm{Dom}F$ nyílt környezete úgy, hogy $F|_G$ differenciálható.

Egyszerű tény, hogy egy sokaság identitása differenciálható, továbbá differenciálható függvények kompozíciója is differenciálható. Ami a legérdekesebb, az az, hogy a sokaság minden térképező leképezése, azaz ha (V,v) térkép (vagyis a maximális atlasznak eleme), akkor v differenciálható, hiszen a definíció szerint az atlasz minden (U,u) elemére $v \circ u^{-1}$ végrtelenszer differenciálható.

Diffeomorfizmusnak mondunk egy függvényt, ha differenciálható bijekció és az inverze is differenciálható.

$\mathcal{D}(M)$ fogja jelölni az $M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket. Ha $f, g \in \mathcal{D}(M)$, akkor a pontonként értelmezett műveletekkel értlemzve $f + g \in \mathcal{D}(M)$ és $fg \in \mathcal{D}(M)$. Jegyezzük meg, hogy a konstans függvények $\mathcal{D}(M)$ elemei.

Legyen x egy M sokaság pontja, és jelölje $\mathcal{D}(x)$ azon $M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyek értelmezve vannak az x valamely nyílt környezetén, és differenciálhatók. Nyilvánvaló, hogy ha $f, g \in \mathcal{D}(x)$, akkor $f + g$ és fg, értelmezve a $\mathrm{Dom}f \cap \mathrm{Dom}g$ halmazon, szintén a $\mathcal{D}(x)$ eleme.

11. Érintőterek

11.1. Az érintőterek értelmezése

Affin térbeli részsokaság egy pontjában az érintőtér az alulfekvő vektortér egy lineáris altere. Itt az általános sokaságok esetén nincs egy vektortér, amelynek bizonyos vektoraiból állnának az érintőterek. A 8 fejezetben mondottak alapján itt az érintővektorokat derivációként értelmezzük.

Definíció. *Legyen x egy M sokaság pontja. Egy $L^x : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{R}$ leképezést* x**-beli derivációnak** *hívunk, ha*

- *$\mathbb{R}$-lineáris, azaz $L^x(\alpha f + \beta g) = \alpha L^x(f) + \beta L^x(g)$,*
- *teljesíti a Leibnitz-szabályt, azaz $L^x(fg) = L^x(f)g(x) + f(x)L^x(g)$*

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $f, g \in \mathcal{D}(x)$ esetén.

Az x egy környezetében konstans függvényt bármely deriváció a nullába képezi; ugyanis a linearitás miatt $L^x(\alpha\alpha) = \alpha L^x(\alpha)$, a szorzat derivációja alapján pedig $L^x(\alpha\alpha) = L^x(\alpha)\alpha + \alpha L^x(\alpha)$.

Világos, hogy egy deriváció számszorosa és két deriváció összege is deriváció, vagyis a derivációk vektoret alkotnak.

Definíció. *Az M sokaság x pontjában az* **érintőtér** *az x-beli derivációk vektortere, amelyet $T_x(M)$-mel jelölünk.*

Állítás. *$T_x(M)$-nek mint vektortérnek a dimenziója megegyezik M dimenziójával.*

Bizonyítás Legyen a sokaság dimenziója m, és vegyünk egy (U, u) térképet az x körül. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\partial}{\partial u^k}(x) : \mathcal{D}(x) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial u^k}(x) := \partial_k\big(f \circ u^{-1}\big)(u(x)) \tag{11}$$

x-beli deriváció minden $k = 1, \ldots, m$ esetén. Mivel $\left(u^i \circ u^{-1}\right)(\xi) = \xi^i$,

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^k}(x) = \delta^i_k \qquad (i, k = 1, \ldots, m),$$

ezért a (11) derivációk lineárisan függetlenek, ugyanis lineáris kombinációjuk csak úgy lehet nulla, ha minden együttható nulla.

Azt kell csak megmutatnunk, hogy bármely deriváció ezeknek a lineáris kombinációja. Ezt a **??**. fejezetben megismert formulák alapján, kissé más érveléssel tehetjük meg. Ugyanis a Taylor-formulát alkalmazva most is a (8) egyenlőségre jutunk, amiből

$$L^x = \sum_k L^x(u^k)\frac{\partial}{\partial u^k}(x) \tag{12}$$

adódik. $\square$

Tehát a sokaság minden x pontjához értelmeztünk egy vektorteret, a pontbeli $T_x(M)$ érintőteret; ezek nem egy adott vektortér alterei, a különböző pontokhoz tartozó érintőtereknek egymáshoz semmi köze.

Az érintőterek vektoraira az affin térnél megszokottal összhangban az $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ stb. szimbólumokat fogjuk használni, ha a félreértés veszélye nélkül elhagyhatjuk a jelölésből az utalást arra, mely érintőtér elemeiről van szó.

11.2. Koérintőterek

A $T_x(M)$ éintőtér duálisát, $T_x(M)^*$-ot az x-beli **koérintőtérnek** hívjuk.

Adott $f \in \mathcal{D}(x)$ esetén a $T_x(M) \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(f)$ leképezés lineáris, azaz van egy egyértelműen meghatározott, $df(x) \in T_x(M)^*$ úgy, hogy

$$\mathbf{x}(f) = (df(x) \mid \mathbf{x}).$$

A $\mathcal{D}(x) \to T_x(M)^*$, $f \mapsto df(x)$ hozzárendelés nyilván lineáris, és az $\mathbf{x}(fg) = \mathbf{x}(f)g(x) + f(x)\mathbf{x}(g)$ összefüggésből adódóan

$$(d(fg))(x) = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

11.3. Bázisok

Egy (U, u) térképezéssel az U minden x pontjában megadtuk a $T_x(M)$ érintőtér egy bázisát, amely $\left\{\frac{\partial}{\partial u^k}(x) \mid k = 1, \ldots, m\right\}$.

Legyen (U', u') egy másik térképezés, és vegyünk egy tetszőleges $x \in U \cap U'$ pontot. Ekkor $\left\{\frac{\partial}{\partial (u')^k}(x)\right\}$ egy másik bázis. Megadjuk, mi a kapcsolat a két bázis között.

Tetszőleges f differenciálható függvényre

$$\frac{\partial f}{\partial u^k}(x) = \partial_k(f \circ u^{-1})(u(x)) = \partial_k(f \circ (u')^{-1} \circ u' \circ u^{-1})(u(x)) = \tag{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \partial_i(f \circ (u')^{-1})(u'(x))\partial_k\left((u')^i \circ u^{-1}\right)(u(x)) = \tag{14}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (u')^i}{\partial u_k}(x)\frac{\partial f}{\partial (u')^i}(x) \tag{15}$$

amit – az egyszerűség kedvéért az x elhagyásával – az Einstein-féle összegzési szabállyal (vagyis a lent és fönn szereplő azonos indexekre automatikusan összegezni kell 1-től m-ig) így foglalhatunk össze:

$$\frac{\partial}{\partial u^k} = \frac{\partial (u')^i}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial (u')^i}, \tag{16}$$

és teljesen hasonlóan

$$\frac{\partial}{\partial (u')^i} = \frac{\partial u^k}{\partial (u')^i}\frac{\partial}{\partial u^k}. \tag{17}$$

Egyszerű tény, hogy a $\frac{\partial}{\partial u^k}(x)$ bázis duálisa az előző alfejezet végén bevezetett jelöléssel $\{du^k(x) \mid k = 1, \ldots, m\}$. Ugyanis

$$\left(du^i(x)\Big|\frac{\partial}{\partial u^k}(x)\right) = \frac{\partial u^i(x)}{\partial u^k} = [\partial_k(u^i \circ u^{-1})](u(x)) = \delta^i_k.$$

A „vesszős” és „vesszőtlen” duális bázisok közötti kapcsolatot az (1) összefüggés alapján származtatjuk:

$$du^j(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(du^j(x)\Big|\frac{\partial}{\partial (u')^i}(x)\right) d(u')^i(x).$$

A jobb oldalra beírva (17) jobb oldalát, és felhasználva a duális bázisokra vonatkozó Kronecker-deltás összefüggést, ismét elhagyva az x-et és az Einstein-öszegzést használva, valamint a j indexet átcserélve k-ra azt kapjuk, hogy

$$du^k = \frac{\partial u^k}{\partial (u')^i} d(u')^i, \tag{18}$$

és teljesen hasonlóan

$$d(u')^i = \frac{\partial (u')^i}{\partial u^k} du^k. \tag{19}$$

A „vesszőtlen” és „vesszős” komponensek közötti két-két összefüggésből

$$\frac{\partial u^k}{\partial (u')^i}\frac{\partial (u')^j}{\partial u^k} == \delta^j_i \tag{20}$$

adódik.

Vessük össze formuláinkat a korábbiakkal:

- (16) és (17) megfelel (3)-nak,
- (18) és (19) megfelel (4)-nak,
- (20) megfelel (5)-nak.

Fontos látni, hogy az itteni összefüggések a térképek metszetén értelmezett **függvények**.

Még egy észrevétel: ha $\mathbf{x} \in T_x(M)$, akkor (12) szerint $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^k)\frac{\partial}{\partial u^k}(x)$, viszont (1) azt mondja, hogy $\mathbf{x} = (du^k(x) \mid \mathbf{x})\frac{\partial}{\partial u^k}(x)$, tehát

$$\mathbf{x}(u^k) = (du^k(x) \mid \mathbf{x}). \tag{21}$$

Végül vessünk egy pillantást az afffin térbeli részsokságok érintőtereire az itteniek szempontjából.

Legyen p egy m-dimenziós részsokaság paraméterezése. Az x pontban a részsokaság érintőtere $\mathrm{D}p(p^{-1}(x))$ értékkészlete. Ha $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ az $\mathbb{R}^m$ standard bázisa, akkor $\mathrm{D}p(p^{-1}(x))e_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ az érintőtér egy bázisa. Az $u := p^{-1}$ jelöléssel

$$\frac{\partial}{\partial u^k}(x) = \mathrm{D}p(p^{-1}(x))\boldsymbol{e}_k. \tag{22}$$

Valóban, (9) és (10) szerint

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^k}(x)\right)(f) = \partial_k(f \circ u^{-1})(u(x)) = \partial_k(f \circ p)(p^{-1}(x)) = \tag{23}$$

$$= \mathrm{D}(f \circ p)(p^{-1}(x))\boldsymbol{e}_k = \mathrm{D}f(x)\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\boldsymbol{e}_k = \tag{24}$$

$$= \big(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\boldsymbol{e}_k\big)(f). \tag{25}$$

12. Nyalábok

12.1. Az érintőnyaláb

A soksaságon értelmezendő differenciálegyenletek kapcsán probléma merül fel: ez olyan függvényeket követelne, amely a sokaság egy nyílt részhalmazának minden pontjához egy vektort rendel a pont feletti érintőtérben, azaz pontonként más és más vektortérben.

Ennek a problémának – és egyebeknek – a megoldására vezetjük be a fogalmat.

Definíció. *Az M sokaság* **érintőnyalábja**

$$T(M) := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x(M).$$

Az érintőnyaláb elemei tehát $(x, \mathbf{x})$ alakú párok, ahol $x \in M$ és $\mathbf{x} \in T_x(M)$. A

$$\Pi : T(M) \to M, \qquad (x, \mathbf{x}) \mapsto x$$

projekció fontos szerepet kap (vegyük észre, hogy $(x, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}$ nem értelmes!).

Az érintőnyalábot is ellátjuk egy sokaságstruktúrával. Nyílt halmazait a következőképp generáljuk: veszünk egy G nyílt halmazt M-ben, és minden $x \in G$ esetén egy N_x nyílt halmazt $T_x(M)$-ben, és

$$\bigcup_{x \in G} \{x\} \times N_x$$

legyen nyílt halmaz $T(M)$-ben. Ekkor Π folytonos, hiszen

$$\overset{-1}{\Pi}(G) = \bigcup_{x \in G} \{x\} \times T_x(M).$$

Legyen ezután (U, u) térkép M-en, és definiáljuk a

$$\Phi_u : \overset{-1}{\Pi}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \qquad (x, \mathbf{x}) \mapsto \big((u(x), (du^1(x) \mid \mathbf{x}), \ldots, (du^m \mid \mathbf{x})\big)$$

leképezést.

Vegyük észre, hogy adott u és rögzített x esetén

$$\Phi_{u,x} : T_x(M) \to \mathbb{R}^m, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \Phi_u(x, \boldsymbol{x})$$

lineáris bijekció, ezért Φ_u injektív leképezés.

Továbbá

$$\Phi_u \big[\bigcup_{x \in G} \{x\} \times N_x \big] = \bigcup_{x \in G} \{u(x)\} \times \Phi_{u,x}[N_x]$$

nyílt halmaz $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$-ben, és ha $H \times N$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$-ben, akkor

$$\overset{-1}{\Phi}_u(H \times N) = \bigcup_{x \in u^{-1}(H)} \{x\} \times \overset{-1}{\Phi}_{u,x}(N)$$

nyílt halmaz az érntőnyalábban.

Mindent összevetve, $\left(\overset{-1}{\Pi}(U), \Phi_u \right)$ térkép $T(M)$-en.

Állítás. *Ha (U, u) és (U', u') kompatibilis térkép M-en, akkor $\left(\overset{-1}{\Pi}(U), \Phi_u \right)$ és $\left(\overset{-1}{\Pi}(U'), \Phi_{u'} \right)$ kompatibilis térkép $T(M)$-en.*

Bizonyítás

$$\Phi_u^{-1}(\xi, \zeta) = \left(u^{-1}(\xi), \zeta^k \frac{\partial}{\partial u^k}(u^{-1}(\xi) \right),$$

ezért

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{u'} \circ \Phi_u^{-1} \right)(\xi, \zeta) &= \left(u'(u^{-1}(\xi)), \zeta^k \left(du'(u^{-1}(\xi) \mid \frac{\partial}{\partial u^k}(u^{-1}(\xi) \right) \right) = \\ &= \big((u' \circ u^{-1})(\xi), \zeta^k \partial_k (u' \circ u^{-1})(\xi) \big),\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a (17) öszefüggést. Eredményünk alapján nyilvánvaló, hogy $\Phi_{u'} \circ \Phi_u^{-1}$ differenciálható. □

A mondottak alapján az M egy atlaszával megadjuk $T(M)$ egy atlaszát, amivel ez utóbbi $2m$-dimenziós sokaság lesz.

12.2. Tenzornyalábok

Az előzőek mintájára értelemszerűen definiáljuk a

$$T^*(M) := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x(M)^*$$

koérintőnyalábot. Ennek elemei tehát $(x, \boldsymbol{p})$ alakú párok, ahol $x \in M$ és $\boldsymbol{p} \in T_x(M)^*$. Az előzővel megegyező betűvel jelöljük a

$$\Pi : T^*(M) \to M, \qquad (x, \boldsymbol{p}) \mapsto x$$

projekciót.

Topoplógiát is az előzek mintájára definiálunk a koérintőnyalábon, és az M egy (U, u) térképevel az $(\overset{-1}{\Pi}(U), \Psi)$ térképet, ahol

$$\Psi_u(x, \boldsymbol{p}) := \left((u(x), \left(\boldsymbol{p} \mid \frac{\partial}{\partial u^1}(x) \right), \ldots, \left(\boldsymbol{p} \mid \frac{\partial}{\partial u^m}(x) \right) \right).$$

Hasonlóan értelmezzük a különféle tenzornyalábokat, $T_x(M) \otimes T_x(M)$-et, $T_x(M) \otimes T_x(M)^*$-ot stb. véve $T_x(M)$ helyett; $T^{r,s}(M)$ az a tenzornyaláb, amelyben $T_x(M)$-nek r-szeres tenzorszorzata és $T_x(M)^*$-nak s-szeres tenzorszorzata szerepel.

13. Vektormezők, tenzormezők

Az érintőnyaláb bevezetésével megnyílt a lehetőség, hogy túljussunk a korábbiakban felvetett problémákon.

Definíció. *Egy $X : M \to T(M)$ differenciálható leképezést* **vektormezőnek** *hívunk, ha $\Pi \circ X = \mathrm{id}_M$. A vektormezők összességét $V(M)$-mel jelöljük.*

A vektormezőnek az x helyen felvett értéke tehát egy pár, amelynek az első tagja x, a második pedig a $T_x(M)$ egy eleme. Ez a második tag a lényeg, az első tag valójában érdektelen, csak azért van, hogy a meghatározás rendben legyen. Ezért a következő jelölést alkalmazzuk:

$$X[x] = (x, X(x)),$$

vagyis ugyanaz a betű jelenik meg magára a párra és a pár második tagjára, csak a zárójel mutatja a különbséget.

Az $(X+Y)[x] := (x, X(x)+Y(x))$ formulával értelmezzük a két vektormező összegét.

Az X vektormezőnek az f differenciálható függvénnyel vett szorzatán az $(fX)[x] := (x, f(x)X(x))$ formulával meghatározott vektormezőt értjük.

A fenti két művelettel $V(M)$ **modulus** $\mathcal{D}(M)$ fölött. A modulus olyan mint a vektortér, azaz értelmezett az összeadás a szokásos tulajdonságokkal, valamint értelmeuett egy „skalárral" való szorzás; ha a skalárok testet alkotnak, akkor vektotérrel van dolgunk, ha ... (ami azt jelenti, hogy két nem nulla skalár szorzata lehet nulla), akkor modulussal.

Minthogy a konstans függvények $\mathcal{D}(M)$ elemei, és a konstans függvénnyel való szorzás valójában számmal szorzás, $V(M)$ egyben valós vektortér is.

Emlékezzünk, értelmezés szerint $X(x)$ a $\mathcal{D}(x)$-nek, és ezáltal a $\mathcal{D}(M)$-nek x-beli derivációja. Ennek értelmében definiálhatjuk az

$$X(f) : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto X(x)(f) = \big(df(x) \mid X(x)\big)$$

függvényt, amely nyilvánvalóan differenciálható. Igaz továbbá, hogy az $f \mapsto X(f)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris, és

$$X(fg) = X(f)g + fX(g);$$

szokásos szóval, X-et felfoghatjuk $\mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ **derivációnak**.

Jól lássuk a különbséget: egy x pont érintővektora, mint x-beli deriváció, függvényhez számot rendel, egy vektormező, mint deriváció, függvényhez függvényt rendel.

Nyilvánvaló, hogy különböző vektormezők különböző derivációkat határoznak meg. Az már nem nyilvánvaló, de bebizonyítható, hogy a $\mathcal{D}(M)$ minden derivációja vektormezőből származtatható. Ennek elfogadásával tehát **a vektormezőket azonosítjuk a derivációkkal**.

Definíció. *Egy $a : M \to T^*(M)$ differenciálható leképezést* **kovektormezőnek** *hívunk, ha* $\Pi \circ a = \mathrm{id}_M$.

Kovektormezőre is az $a[x] := (x, a(x))$ jelölést alkalmazzuk.

Jelölje $A^1(M)$ a kovektormezők összességét (később látjuk ennek a jelölésnek az értelmét). A vektormezőknél bevezetett műveletekhez hasonló összeadással stb. $A^1(M)$ is modulus $\mathcal{D}(M)$ fölött.

$A^1(M)$ azonosítható $V(M)$ **modulus-duálisával**, azaz olyan$V(M) \to \mathcal{D}(M)$ leképezésekkel, amelyek összeghez összeget, függvényszereshez függvényszereset rendelnek, amire úgy hivatkozunk, hogy $\mathcal{D}(M)$-**lineárisak**: ha $a \in A^1(M)$, akkor

$$a : V(M) \to \mathcal{D}(M), \qquad X \mapsto (a \mid X) := \{x \mapsto \big(a(x) \mid X(x)\big)\}.$$

Azt könnyű látni, hogy a fenti képlettel megadott $A^1(M) \to V(M)^*$ hozzárendelés $\mathcal{D}(M)$-lineáris injekció; bizonyítás nélkül elfogadjuk azt a tényt, hogy minden $V(M)^*$-beli elem ilyen formában adható meg.

Speciálisan, ha $f \in \mathcal{D}(M)$, akkor a 11.1 alfejezet végén bevezetett $df(x)$-szel $x \mapsto df[x] := (x, df(x))$ kovektormező, és

$$(df \mid X) = X(f).$$

Figyelem! Négy jelölésben, különböző szerepekben jelenik meg ugyanaz az X betű:

$$X[x], \qquad X(x) \qquad X(f) \qquad (df \mid X).$$

Az előzőekhez hasonlóan egy $L : M \to T^{r,s}(M)$ differenciálható leképezést, amelyre $\Pi \circ L = \mathrm{id}_M$ teljesül, (r,s)-típusú tenzormezőnek hívunk.

Az ilyen tenzormezők a vektortereknél megismertek mintájára azonosíthatók különféle lineáris, illetve bilineáris leképezésekkel. Például egy $(1,2)$ típusú tenzormező felfogható

– akár $V(M) \to \{(1,1)$ típusú tezormezők$\}$ $\mathcal{D}(M)$-lineáris leképezésnek,
– akár $V(M) \times V(M) \to V(M)$ $\mathcal{D}(M)$-bilineáris leképezésnek,
– akár $A^1(M) \times V(M) \times V(M) \to \mathcal{D}(M)$ $\mathcal{D}(M)$-trilineáris leképezésnek.

14. Deriváltak

14.1. Differenciálható függvény deriváltja

Definíció. *Az $F : M \to N$ differenciálható függvénynek az x pontbeli deriváltján azt a*

$$\mathrm{D}F(x) : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$$

lineáris leképezést értjük, amelyet a

$$(\mathrm{D}F(x)\mathbf{x})(g) := \mathbf{x}(g \circ F) \qquad \big(\mathbf{x} \in T_x(M), g \in \mathcal{D}(F(x))\big)$$

formula határoz meg.

Átírva más formába ugyanez

$$\big(dg(x) \mid \mathrm{D}F(x)\mathbf{x}\big) = \big(d(g \circ F)(x) \mid \mathbf{x}\big),$$

amiből látjuk, hogy

$$d(g \circ F)(x) = dg(x) \circ \mathrm{D}F(x).$$

Egyszerűen belátható, hogy ha F diffeomorfizmus, akkor $(\mathrm{D}F^{-1})(F(x)) = (\mathrm{D}F(x))^{-1}$.

A deriváltfüggvény értelmezésénél, csakúgy, mint a vektormezők esetén, az érintőnyalábok segítségével jutunk túl azon a problémán, hogy a fenti definíció szerint különböző x-ekre $\mathrm{D}F(x)$ különböző vektorterek közötti leképezés.

Definíció. *Az $F : M \to N$ differenciálható függvény* **deriváltja** *a*

$$\mathrm{D}F : T(M) \to T(N), \qquad (x, \mathbf{x}) \mapsto \mathrm{D}F[x, \mathbf{x}] := (F(x), \mathrm{D}F(x)\mathbf{x})$$

függvény.

Figyelem! Itt is $\mathrm{D}F$ két különböző objektumot jelöl, csak a zárójelek utalnak a különbözőségre.

Egyszerűen megmutatható, hogy ha G az F-el komponálható differenciálható függvény, akkor $\mathrm{D}(G \circ F) = \mathrm{D}G \circ \mathrm{D}F$.

A deriváltfüggvény tehát értelmezhető az érintőnyaláb segítségével. Ezért elvileg a magasabb rendű deriváltak is bevezethetők; például a második deriváltfüggvény $\mathrm{D}^2F : T(T(M)) \to T(T(N))$. Gyakorlatilag azonban ez szinte használhatatlan, hiszen az érintőnyaláb érintőnyalábja már jóformán áttekinthetetlen. Hasonló a probléma vektormezők (sőt tenzormezők) esetén. Egy $X : M \to T(M)$ vektormező deriváltfüggvénye $\mathrm{D}X : T(M) \to T(T(M))$. Márpedig a vektormezők deriváltja sokszor előbukkan az egyszerű – azaz affin térbeli – alkalmazásokban, tehát itt is szükségünk lesz rá. Erre később visszatérünk.

14.2. Valós függvény differenciálja

A 8.1 alfejezetben mondottak szerint a valós egyenes (mint affin tér) bármely t pontjában az érintőtér azonosítható $\mathbb{R}$-rel (mint az alulfekvő vektortérrel) úgy, hogy az α szám mint t-beli deriváció a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez az $\alpha g'(t)$ számot rendeli.

Tekintsünk egy $f : M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt. Az értelmezés szerint $\mathrm{D}f(x) : T_x(M) \to T_{f(x)}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés.

Tehát $\mathbf{x} \in T_x(M)$ esetén a $\mathrm{D}f(x)\mathbf{x}$ valós számmal (mivel $\mathrm{id}'_{\mathbb{R}} = 1$)

$$\mathrm{D}f(x)\mathbf{x} = (\mathrm{D}f(x)\mathbf{x})(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \mathbf{x}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f) = \mathbf{x}(f) = (df(x) \mid \mathbf{x}),$$

azaz $\mathrm{D}f(x)$ megegyezik a korábban bevezetett $df(x)$-szel. Viszont a $df[x] = (x, df(x))$ kovektormező – amelyet szokás az f **differenciáljának** nevezni, már különbözik a $\mathrm{D}f(x,\mathbf{x}) = (f(x), (df(x) \mid \mathbf{x}))$ deriváltfüggvénytől.

14.3. Tenzormezők függvény általi képe

Legyen $F : M \to N$ differenciálható leképezés.

Mivel $\mathrm{D}F(x) : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ lineáris leképezés, azt gondolnánk, hogy a deriváltfüggvénnyel megadható $V(M) \to V(N)$ leképezés is. Azonban ez nem megy általában, csak ha F diffeomorfizmus; ekkor

$$F_*X := \mathrm{D}F \circ X \circ F^{-1},$$

X-nek az F által **előrevetettje**, vektormező N-en; természetesen ehhez tudnunk kell azt, hogy $\mathrm{D}F$ differrenciálható, amit később belátunk.

Érdemes részletesen is kiírni ennek a vektormezőnek az értékét az $y \in N$ helyen:

$$(F_*X)(y) = \mathrm{D}F(F^{-1}(y))X(F^{-1}(y)) = (\mathrm{D}F(\cdot)X(\cdot))\,(F^{-1}(y)). \tag{26}$$

Ha a vektormezőket mint derivációkat fogjuk fel, akkor $g \in \mathcal{D}(M)^*$ esetén

$$(F_*X)(g) = (dg \mid F_*X) = \big(dg \mid \big(\mathrm{D}F(\cdot)X(\cdot) \circ F^{-1}\big)\big) = \tag{27}$$

$$=(d(g \circ F) \mid X) \circ F^{-1} = (X(g \circ F)) \circ F^{-1}, \tag{28}$$

amit így is írhatunk:

$$(F_*X)(g) \circ F = X(g \circ F).$$

Célszerű bevezetni $f \in \mathcal{D}(M)$ esetére az $F_*f := f \circ F^{-1}$ jelölést. Ezzel

$$F_*(fX) = (F_*f)(F_*X)$$

és

$$F_*(X(f)) = (F_*X)(F_*f).$$

Az első egyenlőség (26) azonnali következménye, a második pedig (27) alapján az $F_*(X(f)) = F_*(df \mid X) = (df \mid X) \circ F^{-1}$ és $(F_*X)(F_*f) = (d(F_*f) \mid F_*X) = \big(df \circ \mathrm{D}F^{-1} \mid \mathrm{D}F \circ X \circ F^{-1}\big)$ összevetéséből adódik.

F_* pontonként van értelmzeve, azaz ha $X(x) = Y(x)$, akkor $(F_*X)(F(x)) = (F_*Y)(F(x))$. Ezért természetes módon kiterjeszthető akármilyen $(r, 0)$ típusú tenzormezőre az $F_*(X \otimes Y) := (F_*X) \otimes (F_*Y)$ képlet alkalmazásával, hiszen $T^{r,0}(M)$ bármely eleme szorzatalakúak lineáris kombinációja.

Az előzőekkel szemben DF-fel mindig lehet kovektormezők közötti leképezést megadni, csak „fordított sorrendben". Nevezetesen, ha $b \in A^1(N)$, akkor

$$(F^*b)(x) := \mathrm{D}F(x)^*b(F(x)) = b(F(x)) \circ \mathrm{D}F(x) \qquad (x, \in M)$$

kovektormezőt határoz meg M-en, amely a b-nek F általi **visszahúzottja** nevet viseli.

Egyszerű tények, hogy ha G komponálható F-fel, akkor $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$, és ha F diffeomorfizmus, akkor $\left(F^{-1}\right)^* = (F^*)^{-1}$.

Célszerű bevezetni $g \in \mathcal{D}(N)$ esetére az $F^*g := g \circ F$ jelölést.

Továbbá F^* az előbbiek mintájára kiterjeszthető akármilyen $(0, s)$ típusú tenzormezőre „szorzattartó" módon.

15. Lokális és koordinátázott alakok

15.1. Lokális alakok

Különféle leképezések lokális alakjain térképekre való való leszűkítéseiknek speciális megjelenési formáit értjük.

Először is egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvénynek egy (U, u) térképre vonatkozó lokális alakja $f|_U$, amiről semmi további nem állítható, ezért azt mondjuk, hogy f lokális alakja önmaga.

15.1.1. Vektormezők, tenzormezők

Vegyünk egy (U, u) térképet M-en. Mint tudjuk, az U minden x pontjában $\frac{\partial}{\partial u^k}(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ bázis az x fölötti érintőtérben. Ezért $\frac{\partial}{\partial u^k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ az az U-n értelmezett vektormezők bázisa (a $\mathcal{D}(U)$-val vett lineáris kombinációkra), ahol $\frac{\partial}{\partial u^k}[x] := \left(x, \frac{\partial}{\partial u^k}(x)\right)$. Hasonlóan, du^k $(k = 1, \ldots, m)$ az U-n értelmezett kovektormezők bázisa. Természetesen $\frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^k}$, $\frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^k$ $(i, k = 1, \ldots, m)$ stb. bázis az U-n értelmezett $(2, 0)$ típusú, $(1, 1)$ típusú stb. tenzormezőknek.

Szűkítsünk le U-ra egy X vektormezőt. A mondottak szerint van olyan $X^k \in \mathcal{D}(U)$ $(k = 1, \ldots, m)$, hogy

$$X|_U = X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

(ne feledjük az Einstein-összegzést). A jobb oldalon szereplő kifejezést a vektormező (U, u)-ra vonatkozó **lokális alakjának** hívjuk. Természetesen, $X^k = (du^k \mid X)$; ezek a vektormező **lokális komponensei**.

Megjegyezzük, a pontosság érdekében jelölni kellene valamiképp, hogy X^k-k épp a szóban forgó térképpel kapcsolatos függvények, de ez túl körülményes lenne, és kellő figyelemmel elkerülhetjük a tévedést, ami a jelölés elhagyásából adódik. Ez tükröződött abban a megállapodásunkban is, hogy egy valós függvény lokális alakja önmaga.

Hasonlóan, az a kovektormezőre

$$a|_U = a_k du^k,$$

ahol $a_k = \left(a\middle|\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$.

Világos, hogy

$$(a \mid X)|_U = a_k X^k.$$

Továbbá például egy $(1,1)$ típusú P tenzormező lokális alakja

$$P^i{}_k \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^k,$$

ahol $P^i{}_k = \left(du^i\middle|P\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$.

Figyelem! A mondottak szerint egy (U, u) térképen értelmezett vektormezők modulusa m dimenziós. Ez nem jelenti azt, hogy maga $V(M)$ is m dimenziós volna, azaz általában nem létezik m darab, $\mathcal{D}(M)$-lineárisan független vektormező, amelyek $\mathcal{D}(M)$-lineáris kombinációjaként bármely vektormező előáll.

15.1.2. Függvények

Tekintsünk egy $F : M \to N$ differenciálható függvényt.

Ennek a függvénynek az M egy (U, u) térképére és az N egy (V, v) térképére vonatkozó lokális alakja

$$F^i := v^i \circ F|_U \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Az F deriváltjának x pontbeli értéke, $\mathrm{D}F(x) : T_x(M) \to T_{F(x)}(N)$ lineáris leképezés. Ha (U, u) és (V, v) olyan térkép, amelyre $x \in U$ és $F(x) \in V$, akkor $\mathrm{D}F(x)$-nek a $T_x(M)$ és $T_{F(x)}(N)$ megfelelő bázisaira vonakozó mátrixa

$$(\mathrm{D}F)^i{}_k(x) := \left(dv^i(x)\middle|\mathrm{D}F(x)\frac{\partial}{\partial u^k}(x)\right) \qquad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m),$$

ami szerint a deriváltfüggvénynek az (U, u)-ra és (V, v)-re vonatkozó lokális alakja

$$\mathrm{D}F|_U = (\mathrm{D}F)^i{}_k \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes du^k$$

A térképekre vonatkozó mátrix komponenseit közvetlenül, a számítások szempontjából jól használható módon a következő formula alapján kaphatjuk meg:

$$(\mathrm{D}F)^i{}_k = \left(dv^i \circ \mathrm{D}F\middle|\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \left(d(v^i \circ F\middle|\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial(v^i \circ F)}{\partial u^k} = \frac{\partial F^i}{\partial u^k}.$$

Érdemes külön megvizsgálni egy f valós függvény differenciálját, amelyet a deriváltjából származtattunk. A meghatározás szerint

$$\left(df\middle|\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial f}{\partial u^k},$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial u^k} du^k.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{D}f$ és df lokális komponensei megegyeznek – de csak akkor! –, ha $\mathbb{R}$-n az $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ térképet vesszük.

Vegyük észre, hogy egy $F : M \to M$ differenciálható függvény deriváltjának lokális alakja és egy $(1,1)$ típusú P tenzormező lokális alakja,

$$(\mathrm{D}F)^i{}_k \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes du^k \quad \text{illetve} \quad P^i{}_k \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^k,$$

megtévesztésig hasonlít egymásra, de F esetén **két** térképről van szó, (U,u)-ról és (V,v)-ről úgy, hogy $F[U] \cap V \neq \emptyset$. Kivételesen persze előfordulhat, hogy a két térkép megegyezik, de általában ez nem áll.

15.2. Tenzormezők függvény általi képei

Legyen $F : M \to N$ diffeomorfizmus, és $X \in V(M)$. (27) alapján az M egy (U,u) és az N egy (V,v) térképe esetén, ha $X|_U = X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, akkor az $(F_*X)|_V$ vektormezőnek a $\left\{\frac{\partial}{\partial v^i}\right\}$ báziselemre vonatkozó komponense

$$\begin{aligned}\left(dv^i \middle| \mathrm{D}F(F^{-1}(\cdot))X^k(F^{-1}(\cdot))\frac{\partial}{\partial u^k}\right) =& X^k(F^{-1}(\cdot))\left(dv^i \middle| \mathrm{D}F(F^{-1}(\cdot))\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \\ =& (X^k \mathrm{D}_k F^i) \circ F^{-1},\end{aligned}$$

tehát az F_*X vektormező lokális alakja

$$(F_*X)|_V = (X^k \mathrm{D}_k F^i) \circ F^{-1} \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Ebből azonnal származtatható bármely tenzormező F_* általi képének a lokális alakja. Például egy M-beli $(2,0)$ típusú T tenzormezőre F_*T lokális alakja

$$(F_*T)|_V = (T^{kl} \mathrm{D}_k F^i \mathrm{D}_l F^j) \circ F^{-1} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Legyen $F : M \to N$ differenciálható leképezés, $a \in A^1(N)$, és tekintsük az előbbi térképeket. Ha $a = a_k dv^k$, akkor az $(F^*a)|_U$ kovektormezőnek a $\{du\}$ bázisra vonatkozó i-ik kompomense $a_k(F(\cdot))dv^k \mathrm{D}F \frac{\partial}{\partial u^i}$, tehát F^*a lokális alakja

$$(F^*a)|_U = a_k(F(\cdot)) \mathrm{D}_i F^k du^i.$$

Ebből azonnal származtatható bármely kotenzormező F^* általi képének a lokális alakja. Például egy N-beli $(0,2)$ típusú K kotenzormezőre F^*K lokális alakja

$$(F^*K)|_U = K_{kl}(F(\cdot)) \mathrm{D}_i F^k \mathrm{D}_j F^l du^i \otimes du^j.$$

15.2.1. Transzformációs szabályok

Tekintsünk az előbbiekben szereplő (U, u) térképen túl egy másik (U', u') térképet, és jelölje a szóban forgó vektormező, illetve kovektormező lokális alakját erre vonatkozóan $(X')^k \frac{\partial}{\partial (u')^k}$, illetve $(a')_k d(u')^k$.

$U \cap U'$-n a „vesszős” és a „vesszőtlen” alak ugyanazt adja, tehát (az összegző indexeket alkalmasan megválasztva) $(X')^i \frac{\partial}{\partial (u')^i} = X^k \frac{\partial}{\partial u^k} = X^k \frac{\partial (u')^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial (u')^i}$. Ezáltal kapjuk a vektormezők **lokális komponenseinek transzformációs szabályát**:

$$(X')^i = X^k \frac{\partial (u')^i}{\partial u^k}. \tag{29}$$

Hasonlóan, a kovektormezők **lokális komponenseinek transzformációs szabálya**:

$$(a')_i = a_k \frac{\partial u^k}{\partial (u')^i}. \tag{30}$$

Ezek a szabályok megfelelnek (3)-naqk, illetve (4)-nak. Hangsúlyozzuk, hogy az itteni formulák **függvényekre** vonatkoznak.

A fentiek mintájára megalkothatjuk a különféle tenzormezők transzformációs szabályát is. Például egy $(1, 1)$ típusú tenormező lokális komponenseinek transzformációs szabálya:

$$(P')^i{}_k = P^j{}_l \frac{\partial (u')^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial (u')^k}.$$

15.3. Koordinátázott alakok

15.3.1. Vektormezők, tenzormezők

A térképek jelentősége abban áll, hogy az u koordinátázással a sokaság pontjait szám m-esekkel reprezentálhatjuk, és ezáltal a sokasággal kapcsolatos minden egyéb objektumot számszerűsíteni tudunk.

A sokaságok elméletének bizonyos tárgyalásaiban olykor összekeverednek a lokális és a koordinátázott alakok. Mi pontosan megkülönböztetjük ezeket, oly módon, hogy a koordinátázott alakot a lokális alak fölé tett „kalap” jelöli.

A koordinátázott alakokat a lokális komponenseknek a térképezés inverzével való kompozíciója adja. Tehát az (U, u) térképpel kapcsolatosan

- az f valós függvény koordinátázott alakja

$$\hat{f} := f \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R},$$

- az X vektormező koordinátázott alakja

$$\hat{X}^k := X^k \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

- az a kovektormező koordinátázott alakja

$$\hat{a}_k := a_k \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

- a P $(1,1)$ típusú tenzormező koordinátázott alakja

$$\hat{P}^i_k := P^i{}_k \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad (i,k = 1,m), \tag{31}$$

és így tovább.

15.3.2. Függvények

Az $F : M \to N$ differenciálható függvény koordinátázott alakja

$$\hat{F}^i := F^i \circ u^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Az F deriváltfüggvényének koordinátázott alakja

$$\widehat{(DF)^i}_k = (DF)^i{}_k \circ u^{-1} = \frac{\partial F^i}{\partial u^k} \circ u^{-1} = \partial_k \hat{F}^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \tag{32}$$

$$(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m),$$

ahol a (11) definíciót alkalmaztuk.

Látható, hogy $N = M$ esetén egy függvényderivált koordinátázott alakja pontosan olyan, mint egy $(1,1)$ típusú tenzormezőé, holott lényegesen különbözik egy tenzormezőtől.

15.3.3. Transzformációs szabályok

Jelölje $\xi := (\xi^1, \ldots, \xi^m)$, illetve $\xi' := ((\xi')^1, \ldots, (\xi')^m)$ a „vesszőtlen”, illetve a „vesszős” koordinátákat, vagyis az U, illetve az U' elemeit. Írjuk a szokásnak megfelelően azt, hogy

$$\xi'(\xi) := (u' \circ u^{-1})(\xi), \qquad \xi(\xi') := \left(u \circ (u')^{-1}\right)(\xi').$$

Ekkor

$$\frac{\partial (u')^i}{\partial u^k} \circ u^{-1} = \frac{\partial \xi'(\xi)^i}{\partial \xi^k} \qquad \frac{\partial u^k}{\partial (u')^i} \circ (u')^{-1} = \frac{\partial \xi(\xi')^k}{\partial (\xi')^i}.$$

Ezek szerint a vektormezők **koordinátás transzformációs szabálya**

$$\hat{X'}^i(\xi'(\xi)) = \hat{X}^k(\xi) \frac{\partial \xi'(\xi)^i}{\partial \xi^k}, \tag{33}$$

a kovektormezőké pedig

$$\hat{a'}_i(\xi') = \hat{a}_k(\xi(\xi')) \frac{\partial \xi(\xi')^k}{\partial (\xi')^i}.$$

15.4. „Úgy transzformálódik, mint...”

Fizikakönyvekben, ahol mindig mindent koordinátákban tekintenek, ilyen meghatározásokat lehet találni: vektor az a mennyiség, mely koordinátarendszer váltásakor a (33), szabály szerint transzformálódik[1].

Látjuk, a vektormező és a koordinátázás pontos definíciója után a (33) transzformációs szabály **állítás** és nem definíció.

Aki csak koordinátákban tesz-vesz, mint a fizikakönyvekben, az könnyen eltévedhet. Persze egy kicsit körülményesen rátalálálhat a helyes útra, megállapítván például, hogy egy függvény deriváltmátrixa **nem úgy transzformálódik**, mint egy tenzormező komponensei.

Előfordul azonban az alkalmazásokban, hogy egy vektormezőt (kovektormezőt, tenzormezőt) csak koordinátákban vagy térképekben ismert alakjaiból tudunk megadni. Ennek megfelelően a következőt állíthatjuk.

Állítás. *Legyen* (U_a, u_a) $(a \in I)$ *a sokaság egy atlasza. Ha minden* a *esetén adottak az* $X^k_{(a)} : U_a \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, m)$ *differenciálható fügvények úgy, hogy*

$$X^k_{(b)} = X^i_{(a)} \frac{\partial u^k_b}{\partial u^i_a} \qquad (a, b \in I),$$

akkor van olyan X *vektormező, amelynek lokális alakjait az adott függvények alkotják.*

16. Kommutátor

Amint arról már szóltunk, vektormezőknek az itt bevezetett deriváltja elüt az affin térnél megismerttől, és gyakorlatilag használhatatlan. Azonban van egy fogalom, amely kapcsolatba hozható a szokásos differenciálással.

Állítás. *Legyen* X *és* Y *vektormező. Tekintsük őket* $\mathcal{D}(M)$ *derivációinak. Ekkor* $XY - YX$ *is a* $\mathcal{D}(M)$ *derivációja, tehát vektormező.*

Bizonyítás Az egyszerű tény, hogy $XY - YX : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ egy $\mathbb{R}$-lineáris leképezés. Legyen $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Ekkor $X(Y(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) = X(Y(f))g+Y(f)X(g)+X(f)Y(g)+fX(Y(g))$. Megcserélve X és Y sorrendjét, és véve a különbséget, azt kapjuk, hogy

$$(XY - YX)(fg) = (XY - YX)(f)g + f(XY - YX)(g). \quad \square$$

Definíció. *Az* $[X, Y] := XY - YX$ *vektormezőt az* X *és* Y **kommutátorának** *hívjuk.*

[1] Landau–Lifsic: „Kontravariáns négyes vektornak hívjuk minden olyan A^i négy mennyiség összességét, amelyek koordinátatranszformációnál úgy transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok.”

Egyszerűen bizonyítható, hogy

$$[X, fY] = X(f)Y - f[X, Y],$$

továbbá teljesül a Jacobi-identitás:

$$[X, Y], Z] + [Z, X], Y] + [Y, Z], X] = 0.$$

Legyen (U, u) térkép. Mivel a parciális diffferenciálások sorrendje felcserélhető,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = 0$$

minden i, k esetén. Ezért, ha $X|_U = X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y|_U = Y^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, a kommutátorra

$$\begin{aligned}
[X, Y]|_U = {} & X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(y^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(X^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \\
= {} & \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}$$

lokális alak adódik.

Ennek megfelelően a kommutátor koordinátázott alakja

$$\hat{X}^k \partial_k \hat{Y}^i - \hat{Y}^k \partial \hat{x}^i.$$

Ez egybevág az affin térbeli $(\mathrm{D}_X Y) - (\mathrm{D}_Y X)$ vektormező koordinátázott alakjával. Jegyezzük meg, hogy ott a különbség mindkét tagja vektormező, itt azonban XY és YX általában nem vektormező.

Állítás. *Ha $F : M \to N$ diffeomorfizmus, $X, Y \in V(M)$, akkor*

$$[F_* X, F_* Y] = F_*[X, Y].$$

Bizonyítás A $g \in \mathcal{D}(N)$ függvényre

$$\begin{aligned}
(F_*[X, Y])(g) \circ F = & [X, Y](g \circ F) = X(Y(g \circ F)) - Y(X(g \circ F)) = \\
= & X(F_* Y(g) \circ F) - Y(F_* X(g) \circ F) = \\
= & (F_* X(F_* Y(g)) \circ F - (F_* Y(F_* X(g)) \circ F = \\
= & [F_* X, F_* Y](g) \circ F.
\end{aligned}$$

17. Külső formák

17.1. Külső szorzás

Egy K r-szeres kotenzormező (másképpen: $(0, r)$ típusú tenzormező) azonosítható a $V(M)$-nek $\mathcal{D}(M)$ értékű, $\mathcal{D}(M)$-re vonatkozóan r-lineáris leképezésével:

$$K(X_1, \ldots, X_r)(x) := \big(K(x)\big)(X_1(x), \ldots, X_r(x)).$$

Egy ilyen kotenzormező antiszimmetrizáltja az

$$A(K)(X_1, \dots, X_r) := \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_r} \mathrm{sign}\pi K(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(r)}),$$

ahol Perm_r az $(1, \dots, r)$ permutációit jelöli.

Jelölje $A^r(M)$ a $V(M)$-nek $\mathcal{D}(M)$ értékű, $\mathcal{D}(M)$-re vonatkozóan r-lineáris, antiszimmetrikus leképezéseit. Egy ilyennek differenciálható függvénnyel vett szorzata, valamint két ilyen összege is ilyen: $A^r(M)$ modulus $\mathcal{D}(M)$ fölött. $A^r(M)$ elemeit r-**formáknak** hívjuk; **külső formán** akármilyen r-formát éertünk.

$A^1(M)$ épp a kovektorok modulusa. Mivel egy antiszimmetrikus leképezés értéke nulla, ha változói lineárisan összefüggnek, $r > m$ esetén $A^r(M) = 0$. Célszerű az $A^0(M) := \mathcal{D}(M)$ megállapodás.

Az a és b kovektor tenzorszorzata az $a \otimes b : V(M) \times V(M) \to \mathcal{D}(M)$, $(X, Y) \mapsto (a \mid X)(b \mid Y)$ $\mathcal{D}(M)$-bilineáris leképezés. Ennek antiszimmetrizáltja, más szóval a kovektorok antiszimmetrikus tenzorszorzata $a \wedge b := a \otimes b - b \otimes a$.

Értelemszerűen az a r-forma és a b s-forma $a \wedge b$ **külső szorzata** az $a \otimes b$ tenzorszorzat antiszimmetrizáltja, egy $r + s$-forma. Egyszerű tény, hogy

$$b \wedge a = (-1)^{rs} a \wedge b.$$

Lokálisan, azaz egy (U, u) térkép esetén $A^r(M)$ bázisát $du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_r}$ alakú elemek adják, ahol $1 \leq i_< i_2 \dots < i_r \leq m$. Ezt a tényt a továbbiakban úgy fogjuk felhasználni, hogy egy r-forma lokálisan

$$f df_1 \wedge \dots \wedge df_r \tag{34}$$

alakú elemek összege, ahol $f, f_1, \dots, f_r \in \mathcal{D}(U)$.

17.2. Külső differenciálás

A következő, kacifántosnak is nevezhető formulával definiálunk egy műveletet, amelyről ki fog derülni, hogy affin térben bizonyos jól ismert, speciális differenciálási műveleteknek felelnek meg.

Definíció. *Az alábbi formulákkal értelmezett $d : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ $(r = 0, 1, \dots, m)$ leképezést* **külső differenciálásnak** *hívjuk:*

$f \in \mathcal{D}(M) = A^0(M)$ esetén $df \in A^1(M)$ a már bevezetett kovektormező,

$a \in A^r(M)$ $r > 0$ esetén da az az $r + 1$-forma, amelynek az $X_1, \dots, X_{r+1}$ vektormezőkön felvett értéke

$$da(X_1, \dots, X_{r+1}) := \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} X_i \Big(a(X_1, \dots, \emptyset_i, \dots, X_{m+1}) \Big) + \\ + \sum_{i<j=1} m + 1 a([X_i, X_j], X_1, \dots, \emptyset_i, \dots, \emptyset_j, \dots, X_{m+1},$$

ahol $\emptyset_i$ azt jelenti, hogy ott a sorból X_i-t ki kell hagyni (figyelem: az első összegben az elől álló vektormező a $\mathcal{D}(M)$ deriválójaként szerepel!).

A definícióból azonnal leolvasható, hogy a külső diffferenciálás $\mathbb{R}$-lineáris leképezés, továbbá lokális művelet, azaz ha G nyílt halmaz, akkor $d(a|_G) = da|_G$, ami maga után vonja, hogy ha $a|_G = 0$, akkor $da|_G = 0$; következésképpen, ha egy nyílt halmazon két külső forma megegyezik, akkor ott a külső deriáltjuk is megegyezik.

Fontos lesz pontosan látnunk, mi egy kovektormező külső deriváltja. Ha $a \in A^1(M)$, akkor

$$da(X,Y) = X(a \mid Y) - Y(a \mid X) - (a \mid [X,Y]). \tag{35}$$

Bármely $f \in \mathcal{D}(M)$ és $a \in A^r(M)$ esetén a külső differenciálás definíciójából, valamint az $X(f) = (df \mid X)$ formulából azonnal következik, hogy

$$d(fa) = df \wedge a. \tag{36}$$

Állítás. *$f_1, \dots, f_r$ differenciálható fügvények esetén*

$$d(df_1 \wedge \dots \wedge df_r) = 0.$$

Bizonyítás A külső differenciálás formulájából közvetlen, de általában hosszadalmas számolással kapjuk a kívánt eredményt. Példaképpen megmutatjuk az $r = 2$ esetet.

$$\begin{aligned}
&\big(d(df \wedge dg)\big)(X,Y,Z) = \\
=&X\big((df \wedge dg)(Y,Z)\big) + Y\big((df \wedge dg)(Z,X)\big) + Z\big((df \wedge dg)(X,Y)\big)- \\
&-(df \wedge dg)([X,Y],Z) - (df \wedge dg)([Y,Z],X) - (df \wedge dg)([Z,X],Y) = \\
=&X\big(Y(f)Z(g) - Z(f)Y(g)\big) + Y\big(Z(f)X(g) - X(f)Z(g)\big)+ \\
&+Z\big(X(f)Y(g) - Y(f)X(g)\big) + [X,Y](f)Z(g) - Z(f)[X,Y](g)+ \\
&+[Y,Z](f)X(g) - X(f)[Y,Z](g) + [Z,X](f)Y(g) - Y(f)[Z,X](g) = \\
=&X(Y(f))Z(g) + Y(f)X(Z(g)) - X(Z(f))Y(g) - Z(f)X(Y(g))+ \\
&+Y(Z(f))X(g) + Z(f)Y(X(g)) - Y(X(f))Z(g) - X(f)Y(Z(g))+ \\
&+Z(X(f))Y(g) + X(f)Z(Y(g)) - Z(Y(f))X(g) - Y(f)Z(X(g))+ \\
&-X(Y(f))Z(g) + Y(X(f))Z(g) + Z(f)X(Y(g)) - Z(f)Y(X(g))+ \\
&-Y(Z(f))X(g) + Z(Y(f))X(g) + X(f)Y(Z(g)) - X(f)Z(Y(g))+ \\
&-Z(X(f))Y(g) + X(Z(f))Y(g) + Y(f)Z(X(g)) - Y(f)X(Z(g)) = \\
=&0. \quad \square
\end{aligned}$$

Állítás. *Ha $a \in A^r(M)$, $b \in A^s(M)$, akkor $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^r a \wedge db$.*

Bizonyítás Mivel külső differeciálás lokális művelet és $\mathbb{R}$-lineáris, elég $a = f df_1 \wedge \dots \wedge df_r$ és $b = g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s$ alakú elemeket vennünk. Ekkor (36) szerint

$$d(a \wedge b) = d(fg df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s) = (g df + f dg) df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s,$$

$$da = d(f df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = df \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_r,$$
$$db = d(g dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_s) = dg \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_s.$$

$da \wedge b$ a $d(a \wedge b)$ első tagját adja, $a \wedge db$ pedig, miután dg-t $df_1 \wedge \cdots \wedge df_r$ elé hoztuk, a sorrendcsere miatt, $d(a \wedge b)$ második tagjának $(-1)^r$-szeresét adja. □

Állítás. $d^2 = 0$.

Bizonyítás Ismét elég (34) alakú elemeket tekintenünk. $d^2(f df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = d(df \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = 0$. □

Egy a külső forma **zárt**, ha $da = 0$, és **egzakt**, ha van olyan b külső forma, amellyel $a = db$.

Nyilván, egy egzakt forma zárt.

Nem bizonyítjuk a következő érdekes és fontos eredményt:

Állítás. *(Poincaré-lemma) Ha M homeomorf $\mathbb{R}^m$-mel, akkor rajta minden zárt külső forma egzakt.*

17.3. Gradiens, rotáció, divergencia

Egy f függvénynek a külső deriváltja a differenciálja, ennek koordinátázott alakja **??** alapján egy (U, u) térképben $(\partial_1 \hat{f}, \ldots, \partial_m \hat{f})$, ami affin tér esetén egybevág a függvény deriváltjának – a fizikában használatos szóval – **gradiensének** koordinátázott alakjával (ez természettes, hiszen df-et az f deriváltjából állítottuk elő).

Egy a kovektormező lokális alakja egy (U, u) térképben $a|_U = a_k du^k$, ahol $\left(a \mid \frac{\partial}{\partial u^k}\right) |U = a_k$. Mivel $\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = 0$, azonnal adódik, hogy

$$da\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial a_k}{\partial u^i} - \frac{\partial a_i}{\partial u^k},$$

következésképpen da koordinátázott alakja

$$\partial_i \hat{a}_k - \partial_k \hat{a}_i, \qquad (i, k = 1, \ldots m),$$

ami egybevág egy affin térbeli kovektormező antiszimmetrikus deriváltjának a koordinátázott alakjával.

Speciálisan $m = 3$ esetén ezek a komponensek $(\partial_2 \hat{a}_3 - \partial_2 \hat{a}_3, \partial_3 \hat{a}_1 - \partial_1 \hat{a}_3, \partial_1 \hat{a}_2 - \partial_2 \hat{a}_1)$, ezért úgy fogalmahatunk, hogy da „lényegében ” az a **rotációja**.

A $d^2 f = 0$ egyenlőség ezért nem más, mint a jól ismert rot grad$f = 0$.

A Poincaré-lemma is jól ismert a szóban forgó keretek között: ha egy „jó” halmazon értelmezett kovektormező rotációja nulla, akkor a kovektormező egy függvény gradiense,

Érdekes formulára vezet egy $m-1$-forma külső deriváltjának a lokális alakja. Egy (U, u) térképben az $m-1$-formák lokális bázisának m elemét úgy kapjuk, hogy $du^1, \ldots, du^m$ közül sorban egyet kihagyunk, és vesszük a többiek külső szorztát. Tehát $a \in A^{m-1}(M)$ lokális alakja

$$a|_U = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} a^k du^1 \wedge \ldots \emptyset^k \cdots \wedge du^m, \tag{37}$$

ezért

$$da|_U = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} da^k \wedge du^1 \wedge \dots \emptyset^k \dots \wedge du^m.$$

Mivel

$$da^k = \frac{\partial a^k}{\partial u^i} du^i,$$

látható, hogy

$$da|_U = \frac{\partial a^k}{\partial u^k} du^1 \wedge \dots \wedge du^m. \tag{38}$$

Következésképpen da koordinátázott alakja

$$\partial_k \hat{a}^k,$$

ami egybevág egy affin térbeli vektormező divergenciájának a koordinátázott alakjával. Ez az egybeesés egyelőre merőben formai, és biztosan nem tökéletes. Ugyanis egy affin térbeli vektormező divergenciája koordinátázástól független skalár. Ugyancsak koordinátázástól (térképtől) független a szóban forgó $m-1$-forma külső deriváltja, a „divergenciás” alak viszont térképtől függ. Ezt a legegyszerűbben úgy láthatjuk, hogy az (U, u) térképről áttérünk az $(U', u') := (U, \alpha u)$ térképre tetszőleges $\alpha \neq 0$ valós számmal. Ekkor $(a')^k = \frac{a^k}{\alpha^{m-1}}$ és $\frac{\partial (a')^k}{\partial (u')^k} = \frac{1}{\alpha^m} \frac{\partial a^k}{\partial u^k}$.

Másrészt kérdés, mi köze egy vektormezőnek (amelynek a divergenciájáról lenne szó) egy $m-1$-formához. Próbáljunk erre választ adni.

Tegyük fel, hogy van egy olyan e m-forma, amely seholsem nulla. Ha X vektormező, akkor $a_{e,X} := e(X, \cdot, \dots, \cdot)$ $m-1$-forma; ennek külső deriváltja m forma, ezért létezik egy $\varphi_{e,X}$ függvény, amellyel

$$da_{e,X} = \varphi_{e,X} e. \tag{39}$$

Lokálisan $e|_U = \eta du^1 \wedge \dots \wedge du^m$ valamely seholasem nulla – feltehetjük, hogy mindenütt pozitív – η függvénnyel, és $a_{e,X}|_U$ (37) alakú, ahol $a^k = \eta X^k$. Következésképpen

$$\varphi_{e,X}|_U = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta X^k}{\partial u^k}. \tag{40}$$

Az $u' := \sqrt[m]{\eta} u$ koordinátázással látható, hogy méltán nevezhetnénk $\varphi_{e,X}$-et az X vektormezőnek az e m-formára vonatkozó **divergenciájának**. Ez azonban függ e-től, és egyelőre nincs „kitüntetett” m-forma, amelyre vonatkozó divergencia lenne „a” divergencia.

$m = 3$ esetén egy két-forma külső derviáltja tehát „divergenciaszerű”, ezért egy a kovektormezőre a $d^2 a = 0$ egyenlőség a jól ismert div rot$a = 0$ megfelelője (erről később többet tudunk mondani).

17.4. Integrálás

Legyen $a \in A^m(M)$. Ennek lokális alakja egy (U, u), illetve egy $U', u')$ térképben, a térképek közös részén,

$$\eta du^1 \wedge \cdots \wedge du^m = \eta' d(u')^1 \wedge \cdots \wedge d(u')^m.$$

A $J^i_k := \frac{\partial u^i}{\partial (u')^k}$ jelöléssel $du^i = J^i_k d(u')^k$. Tehát a bal oldal $\eta J^1_k d(u')^k \wedge \dots J^m_k d(u')^k$ alakú. Az itt szeeeplő összegek antiszimmetrikus szorzatában az azonos tagok szorzatai nullát adnak. Ha tehát az első tényezőben a $J^1_1 d(u')^1$ tagot tekintjük, akkor a többi tényezőből ezt elhagyhatjuk, Szerepelhet viszont az összes többi tag a tényezőkben azz összes lehetséges permutációban, tehát J^1_1 szorzódik a többinek az összes lehetséges permutációjú szorzatával; e szorztokat a megfelelő előjellel ellátva és összegezve így adódik $d(u')^1 \wedge \cdots \wedge d(u')^m$ együtthatója. Elismételve a gondolatmenetet a $J^1_2 du^2$-vel stb, arra jutunk, hogy

$$\eta du^1 \wedge \cdots \wedge du^m = \eta \det(J) d(u')^1 \wedge \cdots \wedge d(u')^m,$$

ahol $\det(J)$ a J^i_k $(i, k = 1, \dots, m)$ mátrix determinánsa, azaz tehát

$$\eta' = \eta \det(J).$$

Az integrálhelyettesítés formulájának ismeretében ezért, ha a sokaság irányítható, akkor az M bármely H „megfelelő” (például kompakt) részhalmazára értelmes a-nak a H-ra vett integrálja úgy, hogy bármely (U, u) térkép esetén

$$\int_{H \cap U} a := \int_{u[H]} \eta \circ u^{-1} = \int_{u[H]} \hat{\eta}(\xi^1, \dots, \xi^m) d\xi^1 \dots d\xi^m.$$

Ezért egy olyan m-formát, amely mindenhol pozitív, **térfogati formának** szokás nevezni.

A Gauss- és Stokes-tétel megfelelője is megfogalmazható sokaságokra. Vázoljuk, hogyan. Bevezethető a **peremes sokaság** fogalma. Egy m dimenziós ilyen M sokaság pereme, ∂M, $m-1$ dimenziós sokaság. Ha M irányítható, akkor ∂M is irányítható, és M irányítása meghatározza ∂M irányítását.

Legyen $a \in A^{m-1}(M)$. a leszűkítése ∂M-re akkor és csak akkor integrálható, ha da integrálható M-en, és ez esetben

$$\int_M da = \int_{\partial M} a.$$

18. Descartes-szorzatok

Véges sok sokaság Descartes-szorzata a szorzattopológiával és atlaszok Descartes-szorzatával meghatározva sokaság lesz, amelynek dimenziója az egyes dimenziók összege.

Pobtos megfogalmazásban két – M és N – sokaságra ez azt jelenti, hogy ha (U, u) az M egy térképe és (V, v) az N egy térképe, akkor $(U \times V, u \times v)$

az $M \times N$ egy térképe, ahol természetesen $(u \times v)(x, y) := \big(u(x), v(y)\big)$; a két sokaság egy-egy atlaszából vett összes térképek ilyen szorzata atlaszt ad $M \times N$-en.

Tekinssük az $f : M \times N \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt.

A függvény egyik változóját rögzítve a másik változóban differenciálható lesz, ahogy azt „többváltozós” függvényeknél ismeretes. Közelebbről, ha például $y \in N$, akkor az $f(\cdot, y) : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ függvény differeneciálható; ez azért igaz, mert az M bármely (U, u) térképe és az N olyan (V, v) térképe esetén, amelyre $y \in V$, $f(\cdot, y) \circ u^{-1} = f \circ (u \times v)^{-1}(\cdot, v(y))$.

Legyen $\mathbf{x} \in T_x(M)$ és $\boldsymbol{y} \in T_y(N)$. Ezekkel az x-beli és y-beli derivációkkal az

$$f \mapsto (\mathbf{x}, \boldsymbol{y})f := \mathbf{x}(f(\cdot, y)) + \boldsymbol{y}(f(x, \cdot)) \qquad (f \in \mathcal{D}(M \times N)$$

formula (x, y)-beli derivációt határoz meg. Az ezáltal megadott $T_x(M) \times T_y(N) \to T_{(x,y)}(M \times N)$ hozzárendelés nyilvánvalóan lineáris és injektív, és lévén az indulási és az érkezési vektortér azonos véges dimenziójú, bijektív is. Ezzel a természetes megfeleltetéssel **azonosítjuk** $T_{(x,y)}(M \times N)$-et $T_x(M) \times T_y(N)$-nel. Más formában a fenti képlet:

$$\mathrm{D}f(x, y)(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{D}f(x, y)(\mathbf{x}, 0) + \mathrm{D}f(x, y)(0, \boldsymbol{y}).$$

Teljesen hasonlósn járhatunk el bármely K sokaság esetén $F : M \times N \to K$ differenciálható függvényre. Ennek megfelelően, rögzített $y \in N$ elemre

$$\mathrm{D}_M F : T(M) \to T(K), \qquad (x, \mathbf{x}) \mapsto \big(F(x, y), \mathrm{D}F(x, y)(\mathbf{x}, 0)\big)$$

az F-nek az M szerinti parciális deriváltja.

Egyszerű tény az is, hogy $F : K \to M$ és $G : K \to N$ differenciálható függvények esetén $(F, G) : K \to M \times N$ differenciálható, és

$$\big(\mathrm{D}(F, G)(x, y)\big)(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) = \big(\mathrm{D}F(x)\mathbf{x}, \mathrm{D}G(y)\boldsymbol{y}\big).$$

19. Kovariáns differenciálás

19.1. Alapvető tulajdonságok

Már többször utaltunk arra, hogy sokaságok esetén a differenciálás általános értelmezésével nem sokra megyünk vektormezőket, kovektormezőket illetően: a deriváltak szinte áttekinthetetlen objektumok lesznek, amelyek nem tenzormezők, eltérően az affin tér esetétől.

Most ezt a kellemetlenséget próbáljuk meg kiküszöbölni egy újfajta diffferenciálás bevezetésével.

Definíció. *Egy* $\nabla : V(M) \to \{(1, 1)$ *tipusú tenzormezők*$\}$ *leképezést* **kovariáns differenciálásnak** *hívunk, ha*

- $\mathbb{R}$-*lineáris,*

- $\nabla(fX) = Y \otimes df + f\nabla X$ *minden* $f \in \mathcal{D}(M)$ *és* $X \in V(M)$ *esetén.*

Szokás a kovariáns differenciálást konnexiónak is nevezni.

Megmutatható, hogy kovariáns differenciálás mindig létezik, azonban messze nem egyértelműen. Viszont elég egyszerűen jellemezhetjük a kovariáns differenciálások összességét. Ehhez, és a továbbiakhoz célszerűen bevezetjük az affin esetben is használt jelölést: a ∇X tenzormezőnek (mint $V(M) \to V(M)$ $\mathcal{D}(M)$-lineáris leképezésnek) az Y tenzormezőn felvett értékét $\nabla_Y X$ jelöli. Ezzel

$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X, \qquad \nabla_Y fX = (df \mid Y)X + f\nabla_Y X.$$

Állítás. *Ha* ∇ *kovariáns differenciálás és* S $(1,1)$ *típusú tenzormező, akkor a* $\nabla'_Y X := \nabla_Y X + S(X,Y)$ *formulával is kovariáns differenciálást kapunk. Másrészt, ha* ∇ *és* ∇' *kovariáns diffferenciálás, akkor* $\nabla' - \nabla$ $(1,1)$ *típsú tenzormező.*

Bizonyítás Az állítás első része igen egyszerű, a bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Az nyilvánvaló, hogy $\nabla' - \nabla$ $\mathbb{R}$-lineáris. Csak azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{D}(M)$-lineáris is. Íme:

$$(\nabla' - \nabla)fX = X \otimes df + f\nabla' X - X \otimes df - f\nabla X = f(\nabla' X - \nabla X). \quad \square$$

Egy kovariáns differenciálásnak alapvető tulajdonsága, hogy ugyanúgy lokális, mint az affin térben a differenciálás, azaz:

Állítás. *Ha az* X_1 *és* X_2 *vektormező megegyezik az* x *pont egy környezetében, akkor* $(\nabla X_1)(x) = (\nabla X_2)(x)$.

Bizonyítás Nyilván elég azt megmutatni, hogy ha X nulla az x egy környezetében, akkor $(\nabla X)(x) = 0$, ami egyenértékű azzal, hogy ha G nyílt halmaz, és $X|_G = 0$, akkor $(\nabla X)|_G = 0$.

Legyen tehát $X|_G = 0$; ekkor a G bármely pontjának van olyan H nyílt környezete, amelyre $\overline{H} \subset G$ teljesül, és van olyan $f \in \mathcal{D}(M)$, hogy $f|_H = 0$ és $f|_{M \setminus G} = 1$. Ezzel $X = fX$, és

$$\nabla X = \nabla fX = X \otimes df + f\nabla X;$$

a jobb oldal leszűkítése H-ra nulla, hiszen mind f és df leszűkítése nulla. Mivel ez a G minden pontjához tartozó megfelelő H-ra igaz, igaz G-re is. $\square$

Mellékletként megmutatjuk azt az analízisből ismert tényt, hogy a mondott tulajdonságú függvény létezik.

Nevezetesen az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\eta(t) := \begin{cases} e^{1/t} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

függvény végtelenszer differenciálható. Ennek megfelelően bármely r és R, $r < R$ pozitív szám esetén az $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$\phi(\xi) := \frac{\eta(R^2 - |\xi|^2)}{\eta(R^2 - |\xi|^2) + \eta(|\xi^2 - r^2)}$$

függvény végtelenszer differenciálható, és

$$\phi(\xi) \begin{cases} = 1 & \text{ha} \quad |\xi| \le r, \\ \in [0,1] & \text{ha} \quad r < |\xi| < R, \\ = 0 & \text{ha} \quad R \le |\xi|. \end{cases}$$

Vegyünk egy (U, u) térképet a G x pontja körül úgy, hogy, $u(x) = 0$. Legyen R olyan, hogy $H := \overset{-1}{u}(\{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi| < R\})$ lezártja is része G-nek. Ekkor a fenti ϕ-vel $f := 1 - \phi \circ u$ a kívánt függvény.

19.2. Torzió

Az X és Y vektormezők kommutátora az afffin térbeli $\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X$ vektormezőnek felel meg. Ez utóbbinak a mintájára a kovariáns differenciálásból is származtathatunk egy vektormezőt, és ezt viszonyítjuk a kommutátorhoz.

Definíció. *A*

$$V(M) \times V(M) \to V(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y Y - [X, Y] =: T(X, Y) \quad (41)$$

leképezést a kovariáns diffferenciálás **torziójának** *hívjuk.*

Egyszerű tény, hogy a torzió antiszimmetrikus: $T(X, Y) = -T(Y, X)$

Állítás. *A torzió* $(1, 2)$ *típusú tenzormező.*

Bizonyítás A torzió nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-lineáris. Csak azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{D}(M)$-lineáris is. Minthogy antiszimmetrikus, elég egy változójára bizonyítani.

$$\begin{aligned} T(X, fY) &= \nabla_X fY - \nabla_{fY} X - [X, fY] = \\ &= (df \mid X)Y + f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (X(f) - f[X, Y] = \\ &= f(\nabla_Y Y - \nabla_X Y - [X, Y]) = fT(X, Y), \end{aligned}$$

mivel definíció szerint $(df \mid X) = X(f)$. □

Ha tehát a torió nulla – azt mondjuk, hogy a kovariáns differenciálás torziómentes –, az azt jelenti, hogy a kovariáns differenciálásból származó „kommutátor" megegyezik a kommutátorral.

Mindig megadható torziómentes kovariáns differenciálás is. Valóban, ha T a ∇ torziója, akkor a

$$\nabla'_Y X := \nabla_Y X - \frac{1}{2} T(Y, X)$$

formulával torziómentes kovariáns differenciálást határozunk meg.

A torziómentesség követelménye szűkíti a kovariáns differenciálások körét, de még így is elég tág a lehetőség; a torziómentesek szimmetrikus tenzormezőben különböznek egymástól.

19.3. Lokális alakok és koordinátázott alakok

A kovariáns differenciálás lokális tulajdonsága miatt, ha G nyílt halmaz, akkor bármely X és Y vektormezőre értelmezhető $\nabla_{Y|_G}(X|_G) := (\nabla_Y X)|_G$.

Ezért beszélhetünk a kovariáns differenciálásnak egy (U, u) térképre vonatkozó lokális alakjáról.

Mivel a térképezés komponensei szerinti differenciálások lokális bázist alkotnak a vektormezők terében, nyilvánvaló, hogy egyértelműen léteznek az U-n éretelmezett $\Gamma^k_{i,j}$ függvények $(i, j, k = 1, \ldots, m)$, az úgynevezett **Christoffel-féle szimbólumok** úgy, hogy

$$\nabla_{\partial/\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Ezek szerint az $Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $X|_U = X^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ lokális alakokkal

$$(\nabla_Y X)|_U = Y^i \left(\nabla_{\partial/\partial u^i} X^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} + Y^i \Gamma^k_{i,j} X^j \frac{\partial}{\partial u^k} = \tag{42}$$

$$= Y^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \Gamma^k_{i,j} X^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}. \tag{43}$$

Hogy jól lássuk: ∇X a meghatározás szerint $(1, 1)$ típusú tenzormező, ennek lokális alakja

$$(\nabla X)|_U = \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \Gamma^k_{i,j} X^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \otimes du^i. \tag{44}$$

Az $(Y, X) \mapsto \nabla_Y X$ hozzárendelés a második változójában nem $\mathcal{D}(M)$-lineáris, így nem tenzormező. Ezért (42) alapján nyilvánvaló, hogy a Christoffel-szimbólumok nem egy tenzormező lokális alakját adják. Szoksásosan azt mondják, nem tenzor, mert nem úgy transzformálódik. Hosszadalmas számolással kimutatható, hogy egy másik, (U', u') térképnek megfelelő Γ' szimbólumokra a

$$(\Gamma')^s_{p,r} = \frac{\partial u^i}{\partial (u')^p} \frac{\partial u^j}{\partial (u')^r} \frac{\partial (u')^s}{\partial u^k} \Gamma^k_{i,j} + \frac{\partial^2 u^j}{\partial (u')^p \partial (u')^r} \frac{\partial (u')^s}{\partial u^j} \tag{45}$$

transzformációs szabály teljesül.

Mivel a lokális báziselemek kommutátora nulla, a torziótenzornak a lokáis alakja

$$T|_U = \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Tehát torziómentes kovariáns differenciálás Christoffel-szombóluma az alsó indexeiben szimmetrikus.

A Christoffel-szimbólumok koordinátázott alakja $\hat{\Gamma}^k_{ij} := \Gamma^k_{ij} \circ u^{-1}$, a $\nabla_Y Y$ koordinátázott alakja pedig $\hat{X}^i \left(\partial_i \hat{Y}^k + \hat{\Gamma}^k_{i,j} \hat{Y}^j \right)$.

Végül egy később fontos szerephez jutó érdekesség:

Állítás. *Van egy γ kovektormező, amelyre bármely (U, u) térkép esetén*

$$\gamma|_U = \Gamma^k_{kj} du^j.$$

A (45) transzformációs formulában az $s = p$ helyettesítést vesszük, és felhasználjuk (20)-t, amivel a

$$(\Gamma')^p_{pr} = \frac{\partial u^j}{\partial (u')^r}\Gamma^k_{kj}$$

összefüggés adódik, és ez egy kovektormezőnek a transzformációs szabálya. □

Az állításban szereplő γ-t a **kovariáns differenciáláshoz rendelt** kovektormezőnek hívjuk.

19.4. Görbület

A kovariáns diffferenciálással bevezetünk még egy fogalmat, amelynek jelentésére később térünk ki.

Definíció. *A*

$$\begin{aligned} &V(M)\times V(M) \to (V(M)\to V(M)),\\ &(Y,X)\mapsto \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_[X,Y] =: R(X,Y) \end{aligned}$$

leképezést a kovariáns diffferenciálás **görbületének** *hívjuk.*

Egyszerű tény, hogy a görbület antiszimmetrikus: $R(X,Y) = -R(Y,X)$

Állítás. *A* $V(M)^3 \to V(M), \quad (X,Y,Z)\mapsto R(X,Y)Z$ *leképezés* $(1,3)$ *típusú tenzormező.*

Bizonyítás Az adott leképezés nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-lineáris. Csak azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{D}(M)$-lineáris is. Minthogy az első két változójában antiszimmetrikus, elég azt bizonyítani, hogy $R(X,fY)gZ = fgR(X,Y)Z$. Ezt az egyszerű, de hosszadalmas számolást az olvasóra bízzuk. □

Ugyancsak egyszerű – de hosszadalmas – számolás eredménye, hogy ha ∇ torziómentes, akkor

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0. \tag{46}$$

Mivel a lokális báziselemek kommutátora nulla, a görbület lokális alakját

$$\left(\nabla_{\partial/\partial u^i}\nabla_{\partial/\partial u^j} - \nabla_{\partial/\partial u^j}\nabla_{\partial/\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} = R^k_{ijl}\frac{\partial}{\partial u^k}$$

adja meg. Ismét kissé hosszadalmas de egyszerű számolással arra jutunk, hogy

$$R^k_{ijl} = \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il}. \tag{47}$$

A lokális komponensekre

$$R^k_{ijl} = -R^k_{jil}$$

teljesül, és a torziómentes esetben

$$R^k_{ijl} + R^k_{lij} + R^k_{jli} = 0.$$

Mivel a görbület $(1,3)$ típusú, három féle módon vehető kontrakciója, ami a lokális komponenseiből jól látható. Az antiszimmetria miatt a háromból kettő egymástól csak előjelben különbözik; ezek egyike az $\overline{R}$ **Ricci-tenzor**, egy $(0,2)$ típusú tenzormező, amelynek a lokális komponensei

$$\overline{R}_{jl} = R^k_{kjl}.$$

Ez alapvető szerepet játszik az általános relativitáselméletben.

Jegyezzük meg, hogy egy dimenziós sokaság görbülete – az antiszimmetrikusság miatt – nulla.

19.5. Tenzormezők kovariáns differenciálása

Mindenek előtt értelmezzük egy f differenciálható függvény kovariáns deriváltját mint a szokásos deriváltját, azaz

$$\nabla f := df.$$

Tehát $\nabla_Y f = (df \mid Y) = Y(f)$.

Ezután értelmezzük az X és Z vektormezők esetén az $X \otimes Z$ $(2,0)$ típusú tenzormezőnek az Y vektormező irányú kovariáns deriváltját a differenciálási szabályok szerint:

$$\nabla_Y (X \otimes Z) := \nabla_Y X \otimes Z + X \otimes \nabla_Y Z.$$

Ezzel értelmezhetjük bármely $(2,0)$ típusú tenzormező kovariáns deriváltját, hiszen a tenzormezők lokálisan ilyen szorzatalakúak összege.

Továbbá a többszörös tenzorszorzatok kovariáns deriváltját is a diffferenciálási szabályok szerint értelmezve, megadhatjuk akármilyen $(r,0)$ típusú tenzormező kovariáns deriváltját.

Vegyünk egy a kovektormezőt. Formálisan a szorzatok differenciálási szabálya szerint $\nabla_Y (a \mid X) = (\nabla_Y a \mid X) + (a \mid \nabla_Y X)$. A bal oldalon álló mennyiség (egy függvény kovariáns deriváltja) és a jobb oldal második mennyiség már ismertek. Ennek alapján **értelmezzük** a jobb oldal első mennyiségét: $\nabla_Y a$ legyen az a kovektormező, amelyre

$$(\nabla_Y a \mid X) := \nabla_Y (a \mid X) - (a \mid \nabla_Y X).$$

teljesül tetszőleges X vektormezővel.

Az előzek mintájára tenzorszorzással ezután tetszőleges (r,s) típusú tenzormező kovariáns deriváltját értelmezhetjük.

Az a kovektormezőre a $(\nabla \wedge a)(X,Y) := (\nabla_X a \mid Y) - (\nabla_Y \mid X)$ formulával meghatározott $\nabla \wedge a$ az affin térbeli antiszimmetrikus deriváltnak felel meg.

Azt is láttuk, hogy az a külső deriváltja is az affin térbeli antiszimmetrikus deriváltnak felel meg.

Állítás. *$\nabla \wedge a = da$ akkor és csak akkor teljesül minden a kovektormezőre, ha a kovariáns diffferenciálás torziómentes.*

Bizonyítás (35) és (41) felhasználásával

$$\begin{aligned}(\nabla \wedge a)(X, Y) =&\nabla_X(a \mid Y) - (a \mid \nabla_X Y) - \nabla_Y(a \mid X) + (a \mid \nabla_Y X) = \\ =&X(a \mid Y) - Y(a \mid X) - (a \mid \nabla_Y Y - \nabla_Y X) = \\ =&da(X, Y) - (a \mid T(X, Y)). \quad \square\end{aligned}$$

Eredményünket kiterjeszthetjük bármely külső formára. Egyszerű belátni például az a és b kovektormezőre, hogy ha $\nabla \wedge a = da$ és $\nabla \wedge b = db$, akkor $\nabla \wedge (a \wedge b) = d(a \wedge b)$.

A torziómentesség tehát a kovariáns deriválást nem csak a kommutátorral „hozza össze”, hanem a külső differenciálással is.

19.6. Kovariáns divergencia

Az X vektormező esetén ∇X $(1, 1)$ típusú tenzormező, tehát vehető (a pontonként értelmezett) nyoma:

$$\nabla \cdot X := \mathrm{Tr}(\nabla X) \in \mathcal{D}(M)$$

az adott vektormezőnek a ∇-ra vonatkozó **kovariáns divergenciája**. (44) alapján ennek lokális alakja

$$(\nabla \cdot X)|_U = \frac{\partial X^k}{\partial u^k} + \Gamma^k_{k,j} X^j.$$

Emlékezzünk a külső differenciálásnál tapasztalt „divergenciaszerűségre” (17.3). Az ottani jelölésekkel, (39) és (40) kapcsán a következő kérdés merül fel a mostani eredményeinkkel: van-e torziómentes kovariáns differenciálás esetén olyan e térfogati forma, hogy minden X vektormezőre

$$da_{e,X} = \nabla \wedge a_{e,X} = (\nabla \cdot X)e, \tag{48}$$

azaz

$$\varphi_{e,X} = \nabla \cdot X. \tag{49}$$

Az egyszerűen látszik, hogy ha van ilyen e, akkor az pozitív szorzó erejéig egyértelmű. Ugyanis ha e' is ilyen, akkor van olyan f differenciálható függvény, hogy $e' = fe$. Ezzel az e'-vel (48) szerint $df \wedge a_{e,x} + f da_{e,X} = f(\nabla \cdot X)e$ kell, hogy teljesüljön, amiből $f = \mathrm{const}$ következik.

A fenti egyenlőségek lokálisan azt adják, hogy

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta X^k}{\partial u^k} = \frac{\partial X^k}{\partial u^k} + \Gamma^k_{k,j} X^j.$$

A bal oldalon elvégezve a differenciálást és átnevezve alkalmasan az összegző indexeket, arra jutunk, hogy

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u^j} = \Gamma^k_{k,j} \tag{50}$$

szükséges. Emlékezzünk vissza, hogy a jobb oldal egy γ kovektormezőnek a lokális komponensei, a bal oldal pedig átírható $\frac{\partial \log \eta}{\partial u^j}$ alakba.

Bebizonyítottuk tehát:

Állítás. *Ha*

- ∇ *torziómentes,*
- *a* ∇*-hoz rendelt* $\gamma \in A^1(M)$ *egy függvény differenciálja,*

akkor van számszorzó erejéig egyértelműen olyan $e \in A^m(M)$*, amellyel* (48), *illetve* (49) *igaz.*

20. Görbék

20.1. Általános meghatározás

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és vegyünk egy $p : I \to M$ differenciálható függvényt. Ennek deriváltja a $t \in I$ pontban $\mathrm{D}p : \mathbb{R} \to T_{p(t)}(M)$ lineáris leképezés (ugyanis I minden pontjában az érintőtér azonos $\mathbb{R}$-rel). Bevezetjük a

$$\dot{p}(t) := \mathrm{D}p(t)1 \in T_{p(t)}(M)$$

jelet.

A sokaságbeli görbe definíciója formailag szinte szórul-szóra megegyezik az affin térbeli görbe deffiníciójával. Az a különbség, hogy folytonosan differenciálható helyett differenciálhatót mondunk, ami a megállapodásunk szerint végtelenszer diffferenciálhatót jelent (persze lehetne itt is csak folytonos differenciálhatóságról beszélni, de „első közelítésben” el akarjuk kerülni a felesleges bonyodalmakat).

Az M egy C részhalmaza **egyszerű görbe**, ha létezik olyan I nyílt intervallum és olyan $p : I \to M$ függvény, amelyet a C **paraméterezésének** hívunk, hogy

- p értékkészlete C,
- p differenciálható, és $\dot{p}(t) \neq \mathbf{0}$ az értelmezési tartományában levő minden t-re,
- p injektív és p^{-1} folytonos.

C **görbe**, ha minden pontjának van olyan környezete, amely egyszerű görbe.

Egy C görbe M-ben maga is diffferenciálható sokaság a következő struktúrával ellátva. Legyen p a görbe egy lokális paraméterezése, és (U, u) az M egy olyan térképe, hogy $U \cap \mathrm{Ran}p \neq \emptyset$. Mivel $u \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ injektív, van az u-nak olyan komponense, amelynek a C egy C_1 részhalmazára leszűkítve injektív; legyen ez például u^1. Ekkor $(U \cap C_1, u^1|_{C_1})$ a C térképe.

A differenciálegyenletet is formailag ugyanúgy értekmezzük, mint affin térben. Legyen $X \in V(M)$; az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail M)? \qquad \dot{x} = X(x)$$

differenciálegyenlet megoldásai olyan $p : \mathbb{R} \rightarrowtail M$ differenciálható függvények, amelyekre $\dot{p}(t) = X(p(t))$ teljesül.

20.2. Görbementi vektormezők

Definíció. *Legyen C görbe M-ben.* **Görbementi vektormezőnek** *hívunk egy $L : C \to T(M)$ differenciálható leképezést, amelyre $\Pi \circ L = id_C$ teljesül.*

Más szóval, a szokásos jelöléseinkkel $L[x] = (x, L(x))$, és $L(x) \in T_x(M)$ minden $x \in C$ esetén.

Speciálisan ilyenek a C érintőmezői, azaz $V(C)$ elemei.

Igen fontos eredmény, hogy egy görbementi vektormező mindig kiterjeszthető a sokaságon értelmezett vektormezővé:

Állítás. *Ha L a C menti vektormező, akkor létezik olyan $\tilde{L} \in V(M)$, hogy $\tilde{L}|_C = L$.*

Bizonyítás Ezt a tényt lokálisan mutatjuk meg, és nekünk elég lesz. Legyen p a görbe egy lokális paraméterezése és (U, u) az M egy olyan térképe, hogy u egy komponensének, mondjuk u^1-nek Ran$p$-re való leszűkítése injektív. Ekkor $\phi := p \circ u^1 : U \to U$ differenciálható és Ran$\phi = C$. Mivel $(\mathrm{D}u)(y) : T_y(M) \to \mathbb{R}^m$ lineáris bijekció minden $y \in U$ esetén,

$$\tilde{L}(y) := \big((\mathrm{D}u)(y)\big)^{-1}(\mathrm{D}u)(\phi(y))L(\phi(y)) \qquad (y \in U)$$

a kívánt kiterjesztés. $\square$

A következők magyarázatához tekintsünk egy C görbét egy V affin térben és egy $\boldsymbol{L} : \mathrm{V} \to \mathbf{V}$ vektormezőt. A vektormező állandó a görbe mentén – vagy azt is mondhatjuk, párhuzamos a görbe mentén –, ha a görbe bármely p paraméterezésére $0 = (\boldsymbol{L} \circ p)^{\cdot} = \big((\mathrm{D}L) \circ p\big)\dot{p} = \mathrm{D}_{\dot{p}}(L \circ p)$.

Definíció. *A C görbe menti L vektormező* **párhuzamos a C-n** *a ∇ kovariáns differenciálásra vonatkozóan, ha bármely $S \in V(C)$ esetén $\nabla_{\tilde{S}}\tilde{L} = 0$.*

Mivbel a görbe érintőterei egy dimenziósak, elég egyetlen olyan S-et tekinteni, amely seholsem nulla.

Állítás. *A fenti definíció fügetlen a vektormezők kiterjesztésétől.*

Bizonyítás A definíció lokálisan azt adja, hogy

$$\tilde{S}^i \left(\frac{\partial \tilde{L}^k}{\partial u^i} + \Gamma^k_{ij} L^j \right) |_C = 0.$$

A második tag nyilvánvalóan független a kiterjesztésektől, az első tagot pedig vegyük úgy, hogy $\tilde{S}^i|_C = \dot{p} \circ p^{-1}$ valamely paraméterezésre. Ekkor

$$\left(\tilde{S}^i \frac{\partial \tilde{L}^k}{\partial u^i}\right)(p(t)) = \dot{p}^i(t)\partial_i(\tilde{L}^k \circ u^{-1})(u(p(t)) =$$

$$= (\tilde{L}^k \circ u^{-1} \circ u \circ p)^{\cdot}(t) = (L^k \circ p)^{\cdot}(t)$$

ami szintén független a kiterjesztésektől.

Összefoglalva, a görbe mentén párhuzamos L vektormezőre a görbe egy p lokális paraméterezésével és az $\hat{L} := L \circ p$ jelöüléssel

$$(\hat{L}^k)^{\cdot} + \dot{p}^i \hat{\Gamma}^k_{ij} \hat{L}^j = 0 \tag{51}$$

teljesül.

Ez közönséges lineáris differenciálegyenlet-rendszer az $L^k \circ p$ $(k = 1, \ldots, m)$ függvényekre, amelyek teljesen jellemzik L-et lokálisan. A differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitástétele értelmében, ha adott egy $x_0 \in C$ és egy $\mathbf{x}_0 \in T_{x_0}(M)$, akkor létezik egyértelműen a görbe egy szakaszán egy a görbe mentén párhuzamos L vektormező úgy, hogy $L(x_0) = \mathbf{x}_0$. A görbe szakaszát egy paraméterezés és egy térkép határrozza meg. Kérdés, „összefűzhetők"-e az ilyen szakaszokon nyert párhuzamos vektormezők a görbe egészére. Általában nem; zárt görbére előfordulhat, hogy valahonnan elindulva „előre" és „hátra" haladva a vektormező különböző értékekkel találkozik (lásd **??**).

Azt mondjuk, hogy a fentiek szerint kapott lokális vektormezőnek az $L(x)$ értéke az $\mathbf{x}_0$ vektornak a **görbe menti párhuzamos eltoltja**. Vezessük be a $\tau_C(x, x_0)\mathbf{x}_0$ jelölést erre a párhuzmos eltoltra.

Természetesen x_0 a görbe bármely pontja lehet. Ezért így is fogalmazhatunk: bármely $y \in C$ és $\boldsymbol{y} \in T_y(M)$ esetén, ha $x \in c$ „elég közel van" y-hoz, akkor létezik y-tól x-ig a görbe menti eltoltja $\boldsymbol{y}$-nak, amelyre a $\tau_C(x, y)\boldsymbol{y} \in T_x(M)$ jelölést alkalmazzuk.

A differenciálegyenlet linearitása és megoldásainak egyértelműsége következtében, ha $y, x \in C$, akkor

$$T_y(M) \to T_x(M), \qquad \boldsymbol{y} \mapsto \tau_C(x, y)\boldsymbol{y} \tag{52}$$

lineáris bijekció.

A mondottak lehetővé teszik, hogy a kovariáns differenciálást összhangba hozzuk a differenciálás szokásos formulájával.

Legyen C az Y vektormező egy integrálgörbéje, azaz C paraméterezésére a $\dot{p}(t) = Y(p(t))$ teljesül. Megmutatható, hogy

$$(\nabla_Y X)(p(t) = \lim_{s \to t} \frac{1}{s - t} \left(\tau_C(p(t), p(s))X(p(s)) - X(p(t))\right).$$

20.3. Geodetikusok

Definíció. *A C görbe* **geodetikus** *az adott kovariáns differenciálásra vonatkozóan, ha bármely pontja körül van olyan p paraméterezése, hogy $\dot{p} \circ p^{-1}$ párhuzamos a C mentén.*

(52) szerint egy geodetikus p paraméterezésére lokálisan

$$\ddot{p}^k + (\Gamma^k_{ij} \circ p)\dot{p}^i\dot{p}^j = 0$$

teljesül.

A fenti formula differenciálegyenlet a paraméterezésre. Ezért megállapíthatjuk, hogy ha $x_0 \in M$ és $\mathbf{x}_0 \in T_{x_0}(M)$ tetszőleges, akkor létezik egyetlen C maximális geodetikus úgy, hogy $x_0 \in C$ és $\mathbf{x}_0 \in T_{x_0}(C)$.

Igen egyszerű tény, hogy ha p és q is geodetikus paraméterezés, akkor $q(t) = p(\alpha t + \beta)$ valemely α, β valós számokkal.

Az is világos, hogy az $S : V(M) \times V(M) \to V(M)$ tenzormezővel ∇ és $\nabla + S$ szerinti geodetikusok akkor és csak akkor egyeznek meg, ha S antiszimmetrikus.

Végül, ha X olyan vektormező, hogy $\nabla_X X = 0$, akkor az integrálgörbéi geodetikusok.

20.4. Egy példa

Adjuk meg $\mathbb{R}^3$-on a

$$\nabla_Y X := \mathrm{D}_Y X + Y \times X$$

formulával meghatározott kovariáns differenciálást, ahol D a szokásos differenciálás és $\times$ a vektoriális szorzás.

Vegyük az $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ térképet. Legyen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ a kanonikus bázis. A konstans $\boldsymbol{e}_k$ vektormezőkre

$$\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k = \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j = \in^k_{ij} \boldsymbol{e}_k,$$

ahol $\in$ a Levi-Civita-szimbólum.

Adott $a, b \in \mathbb{R}^3$ esetén a $p(t) := at + b$ paraméterezéssel megadott egyenes mentén párhuzamos L vektormezők differenciálegyenlete

$$(\hat{L}^k)^{\cdot} + a^i \in^k_{ij} \hat{L}^j = 0,$$

azaz

$$(\hat{L})^{\cdot} = -a \times \hat{L},$$

amely az egyenes körüli $-a$ szögsebességű forgást írja le.

20.5. Sebesség, gyorsulás

Gondoljunk arra, hogy egy tömegpont a fizikai terünkben csak valamely felületen - például egy gömbhéjon – mozoghat (kényszermozgás). Legyen M ez a felület (affin térbeli részsokaság). Az egyszerűség kedvéért az időpontokat valós számoknak tekintve (egy időegység választásával) a tömegpont mozgását egy $r : I \to M$ (elég sokszor) differenciálható függvény írja le, ahol $I \subset \mathbb{R}$ valamely intervallum.

Egyszerű képzetünk szerint a tömegpont sebessége a mozgásfüggvény deriváltja. Mint tudjuk, $\mathrm{D}r : T(I) \to T(M)$, ami nem pontosan adja vissza az egyszerű képzetünket, mely szerint a sebesség is az idő függvénye, azaz I-en és nem $T(I) = I \times \mathbb{R}$-en értelmezett függvény. Viszont a 20.1 elején bevezetett jelöléshez hasonlóan a felület $r(t)$ pontjában érintő irányú $\dot{r}(t) := \mathrm{D}r(t)1$ a t pillanatbeli sebességvektor. Ilyen felfogásban végülis $\mathrm{D}r$ mint sebességfüggvény rendben van.

A gyorsulással azonban, mint a sebességfüggvény deriváltjával, már baj van: $\mathrm{D}^2r : T(T(\mathbb{R})) \rightarrowtail T(T(F))$ nem csak áttekinthetetlen, de semmiképp sem hozható összhangba a szokásos gyorsulás-képünkkel.

Járjuk egy kicsit körül a gyorsulás szokásos értelmezését!

Durván szólva a t pillanatbeli gyorsulás $\lim_{s\to t} \frac{\dot{r}(s)-\dot{r}(t)}{s-t}$. Csakhogy ennnek így nincs értelme, hiszen (kivéve persze triviális eseteket, mint például, ha $r(s) = r(t)$, vagy a sokaság affin tér) $\dot{r}(s)$ és $\dot{r}(t)$ különböző érintőterekben vannak. Azért, hogy a különbségüket vehessük, össze kell hozni őket, mondjuk úgy, hogy $\dot{r}(s)$-et „áttoljuk” az $r(t)$ érintőterébe. Ezt az áttolást nyilvánvalóan a mozgás pályája mentén, és „párhuzamosan” kell végrehajtanunk.

Hogy az idézőjelbe tett szavak mit jelentenek, épp arről szól a 20.2 alfejezet, amelynek a végén idézett képlet pontosan ráillik a gyorsulás értelmezésére.

Megállapíthatjuk, hogy gyorsulást egy ∇ kovariáns differenciálás segítségével értelmezhetjük kielégítően. A 20.2 jelölését használva legyen $\dot{\mathbf{r}} := \widehat{\dot{r} \circ r^{-1}}$. Ekkor a t pillanatbeli gyorsulás

$$(\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}})\,(r(t)).$$

Már csak az a kérdés, milyen kovariáns differenciálást válasszunk. Erre később visszatérünk: pszeudo-Riemann-sokaságok esetében a kovariáns differenciálás – természetes követelmények mellett – egyértelmű.

A (32)) összefüggés szerint a sebesség, amely a mozgásfüggvénynek a deriváltja, koordinátázott alakban a mozgásfüggvény koordinátázott alakjának a deriváltja; egyszerű szavakban, a sebbesség koordinátái a koordinátafüggvények időderiváltja.

A gyorsulás koordinátái viszont általában nem a sebességkoordináták időderiváltja (azaz nem a koordinátafüggvények második időderiváltja).

Adott kovariáns deriváláshoz tartozó Christoffel-szimbólummal az r mozgás gyorsulására lokálisan

$$\ddot{r}^k + (\Gamma^k_{ij} \circ r)\dot{r}^i\dot{r}^j \tag{53}$$

áll fenn.

Ha a tömegpontra nem hat a kénnyszeren kívüli erő (szabaderő, ahogy mondani szokás), akkor a gyorsulása nulla: a tömegpont pályája geodetikus.

21. Pszeudo-Riemann-sokaságok

21.1. Alapvető tulajdonságok

A skaláris szorzat a fizikai terünk modellezésében, a Lorentz-szorzat – egy pszeudo-euklideszi szerkezet – a téridő modellezésében fontos szerepet játszik. Ezeknek az általánosítását vezetjük be a sokaságok esetében.

Az álalánosítás nyilvánvaló: egy sokaság minden pontjának az érintőterén megadunk egy pszeudo-euklideszi szerkezetet, amely simán függ a pontoktól.

Definíció. **Pszeudo-Riemann-sokaságnak** *hívunk egy* (M, g) *párt, ahol* M *sokaság és* g *egy* $(0, 2)$ *típusú olyan tenzormező, hogy* $g(x) : T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbb{R}$ *pszeudo-euklideszi szerkezet minden* $x \in M$ *esetén. Ha* $g(x)$ *pozitív definit minden* x*-re, akkor Riemann-sokaságot mondunk.*

g-t szokás a sokaság **metrikus tenzorának** nevezni.

A $g(x)$ pszeudo-euklideszi szerkezet szerinti $T_x(M) \equiv T_x(M)^*$ azonosítás következtében a vektormezőket azonosíthatjuk a kovektormezőkkel:

$$V(M) \to A^1(M), \qquad X \mapsto g(X, \cdot)$$

$\mathcal{D}(M)$-lineáris bijekció, amelynek a segítségével egy vektormezőt „természetes módon" felfoghatunk kovektormezőnek, illetve egy kovektormezőt vektormezőnek, amit így fejezünk ki:

$$V(M) \equiv A^1(M), \qquad X \equiv g(X, \cdot).$$

Az (U, u) térképben

$$g|_U = g_{ik} du^i \otimes du^k. \tag{54}$$

Az X vektormezőhöz, amelynek lokális alakja $X^k \frac{\partial}{\partial u^k}$, rendelt kovektormező lokális alakját $X_i du^i$ alakban szokás írni; nyilvánvaló, hogy

$$X_i = g_{ik} X^k.$$

Természetesen ez meg is fordítható:

$$X^k = g^{ki} X_i,$$

ahol a jobb oldali együtthatókat

$$g^{ki} g_{ij} = \delta^k_j$$

hatarozza meg ($g^{\cdot\cdot}$ a $g_{\cdot\cdot}$ mátrix inverze).

Egy másik, $U', u')$ térképben g lokális alakja $g|_{U'} = g'_{ik} d(u')^i \otimes d(u')^k$.

A $J^i_k := \frac{\partial u^i}{\partial (u')^k}$ jelöléssel $du^i = J^i_k d(u')^k$, és így $g'_{ik} = J^j_i J^l_k g_{jl}$. Az itt szereplő mátrixok determinánsára értelemszerű jelölést alkalmazva

$$\sqrt{|\det g'_{\cdot\cdot}|} = |\det J| \sqrt{|\det g_{\cdot\cdot}|}.$$

Ha M irányítható, akkor azonos irányítású térképek esetén $\det J > 0$, tehát ekkor g lokális alakjaiban szereplő mátrix determinánsának négyzetgyöke úgy transzformálódik, mint egy m-forma lokális alakja, vagyis van egy $\sqrt{|\det g|}$-vel-jelölt m-forma úgy, hogy bármely (U, u) térkép esetén

$$\sqrt{|\det g|}\ \Big|_U = \sqrt{|\det g_{\cdot\cdot}|} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m.$$

.

Természetesen $\sqrt{|\det g|}$ mindenhol pozitív: ez a pszeudo-Riemann-sokaság **kanonikus térfogati formája**.

Figyelem! g-nek nincs determinánsa (lásd 2.3 végét), $\sqrt{|\det g|}$ csak alkalmas jelölése annak az m-formának, amelynek lokális alakjait a g lokális alakjainak determinánsából lehet származtatni.

Hogy pontosabban lássunk: egy L $(1,1)$ típusú tenzormezőnek van determinánsa, és $\det L$ differenciálható függvény. Ha ez seholsem nulla, akkor $|\det L|$ és $\sqrt{|\det L|}$ is differenciálható, azaz $\mathcal{D}(M)$-ben van, más szóval 0-forma. Ezzel szemben $\sqrt{|\det g|}$ m-forma.

21.2. A kovariáns deriválás

Emlékezzük, egy ∇ kovariáns deriválástól természetes megkövetelnünk, hogy legyen torziómentes, mert akkor (és csak akkor) teljesül, hogy $\nabla_Y Y - \nabla_X Y = [X,Y]$ és a $\nabla \wedge a = da$ minden a külső forma esetén.

A pszeudo-Riemann-szerkezet még egy természetes követelményt támaszt egy kovariáns deriválással szemben. Azt várjuk el, hogy bármely C görbe menti párhuzamos eltolás az érintőterek g-izometrikus leképezése legyen, azaz (52) jelölésével

$$g(x)\,(\tau_C(x,y)\boldsymbol{y}_1, \tau_C(x,y)\boldsymbol{y}_2) = g(y)(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$$

minden $x, y, \in C$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in T_(M)$ esetén.

Átfogalmazva ez azt jelenti: bármely C görbe esetén, ha az X és az Y olyan vektormezők, hogy $X|_C$ is, Y_C is párhuzamos a C mentén, akkor $g(X,Y)|_C$ konstans.

Ez a követelmény egyenértékű azzal, hogy $\nabla g = 0$.

Ugyanis tekintsünk egy tetszőleges Z vektormezőt, és legyen X is Y is bármely, a Z egy C integrálgörbéje mentén párhuzamos vektormező. Ekkor $(\nabla_Z X)|_C = (\nabla_Z Y)|_C = 0$.

Mivel

$$\nabla_z(g(X,Y)) = (\nabla_z g)(X,Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \tag{55}$$

amiből az következik, hogy $\nabla_z(g(X,Y))|_C = 0$ – vagyis $g(X,Y)$ állandó a C mentén – egyenértékű a $(\nabla_z g)(X,Y)|_C = 0$ egyenlőséggel – vagyis azzal, hogy $\nabla_z g$ nulla a c mentén. Ez minden vektormező minden integrálgörbéjére igaz, ezért igaz az állításunk.

Állítás. *Az (M,g) pszeudo-Riemann-sokaságon egyetlen olyan ∇ kovariáns diffferenciálás van,*

- *amely torziómentes,*
- *amelyre $\nabla g = 0$ teljesül.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy van a feltételeknek eleget tevő ∇. A torziómentesség $\nabla_Z X = \nabla_X Z + [Z, X]$ felhasználásával írjuk át (55)-t (ne feledjük, differenciálható függvényre $\nabla_Z f = Z(f)$)

$$Z(g(X,Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g([Z,X],Y)$$

alakba. Permutálva ciklikusan a betűket, két másik hasonló egyenlőséget kapunk, amelyekből ∇_Y-t és ∇_X-et kiküszöbölve a

$$\begin{aligned} 2g(X, \nabla_Z Y) &= Z(g(X,Y)) + g([Z,X],Y) - && (56)\\ &+ Y(g(Z,X)) + g([Y,Z],X) - && (57)\\ &- X(g(Y,Z) - g([X,Y],Z). && (58) \end{aligned}$$

összefüggésre jutunk.

Ezzel **definiálhatjuk** ∇-t: legyen az a kovariáns differenciálás, amely adott Y, Z esetén minden X-re teljesíti ezt az egyenlőséget; tehát létezik kívánt kovariáns differenciálás. Ha ∇' szintén ilyen tulajdonságú, akkor a fenti egyenlőség szerint $g(X, \nabla'_Z Y) = g(X, \nabla_Z Y)$ minden $X, Y, Z \in V(M)$ esetén, amiből $\nabla' = \nabla$ következik. $\square$

A fenti egyenlőségből lokálisan, mivel a kommutátorok nullák,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \nabla_{\partial/\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + - \frac{\partial g_{Ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}\right)$$

adódik. A bal oldal $g_{il}\Gamma^l_{jk} =: \Gamma_{ijk}$, amiből

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{li}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}\right). \tag{59}$$

21.3. A kovariáns divergencia

Az előző képletből azonnal következik, hogy

$$\gamma_k := \Gamma^l lk = \frac{1}{2} g^{li} \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k}.$$

A jobb oldalt átalakíthatjuk a következő módon.

Tekintsük $\det g_{..}$-t. Jelölje G^{li} a g_{li}-hez tartozó aldeterminánst. Ismeretes, hogy

$$g^{li} = \frac{G^{li}}{\det g_{..}},$$

tehát

$$g_{li} G^{lj} = \delta^j_i \det g_{..}.$$

Mivel G^{li}-ben nem szerepel g_{li}, az utóbbi képletből az következik, hogy

$$\frac{\partial \det g_{..}}{\partial g_{li}} = G^{li}.$$

Következésképpen

$$\frac{\partial \det g_{..}}{\partial u^k} = \frac{\partial \det g_{..}}{\partial g_{li}} \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} = G^{li} \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k},$$

tehát

$$\frac{1}{\det g_{..}} \frac{\partial \det g_{..}}{\partial u^k} = g^{li} \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k}.$$

Eszerint

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \frac{1}{\det g_{..}} \frac{\det g_{..}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{|\det g_{..}|}} \frac{\sqrt{|\det g_{..}|}}{\partial u^k} = \frac{\partial(\log \sqrt{|\det g_{..}|})}{\partial u^k}.$$

Tehát pszeudo-Riemann-sokaság kovariáns differenciálására teljesülnek a 19.6 alfejezetben kirótt feltételek, így a vektormezők kovariáns divergenciája rendelkezik az elvárt jó tulajdonsággal; azt is látjuk, hogy

$$e := \sqrt{|\det g|}$$

az az m-forma –a kanonikus térfogati forma –, amellyel (48), illetve (49) teljesül.

21.4. Görbület

Állítás. *A pszeudo-Riemann-sokaság R görbületi tenzorára*

$$g(R(Z,V)X,Y) = g(R(X,Y)Z,V) = -g(R(X,Y)V,Z)$$

teljesül minden X, Y, Z, V vektormezőre.

Bizonyítás Elég volna ezeket belátni lokálisan, ezért elég belátni kommutatív vektormezőkre. A pszeudo-Riemann-féle kovariáns diffferenciálás (56) formulájából ekkor

$$2g(\nabla_Y Z, Z) = Y(g(Z,Z))$$

következik, valamint

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_y.$$

Mivel $g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = \nabla_X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)$ és a jobb oldal első tagja $X(g(\nabla_Y Z, Z) = XY(g(Z,Z))$,

$$2g(R(X,Y)Z,Z) = [X,Y](g(Z,Z)) = 0$$

a kokmmutativitás miatt. Ez azt jelenti, hogy $g(R(X,Y)Z,V)$ antiszimmetrikus az utolsó két változóban, vagyis az állítás második egyenlősége teljesül. Ennek és a (46) összefüggésnek következménye az első egyenlőség. □

Tehát a görbületi tenzor általános szimmetria-tuljdonságain túl, az $R_{iklm} := g_{is}R^s_{klm}$ lokális komponensekre

$$R_{lmik} = R_{iklm} = -R_{mkli}$$

teljesül.

Vezessük be a

$$K(X,Y) := g\big(R(X,Y)X,Y\big)$$

mennyiséget tetszőleges X és Y vektormezőre.

Csak számolás kérdése, hogy megmutassuk, bármely X,Y,Z,V vektormezőre

$$6\big(g(R(X,Y)Z,V)\big) = K(X+V,Y+Z) - K(X+V,Y) - K(X+V,Z) - \tag{60}$$
$$-K(X,Y+Z) - K(V,Y+Z) + K(X,Z) + K(V,Y) - \tag{61}$$
$$-K(Y+V,X+Z) + K(Y+V,X) + K(Y+V,Z) + \tag{62}$$
$$+K(Y,X+Z) - K(V,X+Z) - K(Y,Z) + K(V,X), \tag{63}$$

ami azt jelenti, hogy K meghatározza R-et.

Állítás. *Legyen (M,g) Riemann-sokaság (azaz g pozitív definit). Ha az X és Y vektormező értékei seholsem párhuzamosak, és X', Y' ezek $\mathcal{D}(M)$ lineáris kombinációi, szintén seholsem párhuzamos értékekkel, akkor*

$$\frac{K(X',Y')}{g(X',X')g(Y',Y') - g(X',Y')^2} = \frac{K(X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

Bizonyítás A párhuzamosságot azért kellett kizárni, mert akkor a nevező (és a számláló is) felvehetne nulla értéket. Így viszont a Cauchy-egyenlőtlenség miatt értelmesek a szóban forgó mennyiségek.

Legyen $X' = fX + hY$, $Y' = aX + bY$.

Vegyük észre, hogy az $r(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$ jelölés bevezetésével a jobb oldal nevezőjét $g\big(r(X,Y)Z,V\big)|_{Z=X,V=Y}$ alakba írhatjuk át, a számláló pedig $g\big(R(X,Y)Z,V\big)|_{Z=X,V=Y}$. Kihsználva, hogy mind a számlálóban, mind a nevezőben megjelenő kifejezés antiszimmerikus X,Y-ban is, Z,V-ben is, könnyen jutunk arra az eredményre, hogy a „vesszőtlen” mennyiségeket kicserélve a „vesszősökkel”, mind a számláló, mind a nevező $(af-bh)^2$-tel szorzódik. □

21.5. Két dimenziós Riemann-sokaság görbülete

Az előző eredményünk alapján egy két dimenziós Riemann-sokaság essetén van egy $\kappa \in \mathcal{D}(M)$ úgy, hogy

$$g(R(X,Y)X,Y) = K(X,Y) = \kappa\left(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2\right)$$

bármely X és Y vektormezőre.

Állítás. *Ha (M,g) két dimenziós Riemann-sokaság, akkor*

$$R(X,Y)Z = \kappa\ (g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

minden X,Y,Z vektormezőre.

Bizonyítás Legyen R_1 a fenti jobb oldal, és $R_0 := R - R_1$. R_0 ugyanolyan algebrai tulajdonságú, mint R, ezért a $K_0(X,Y) := g(R_0(X,Y)X,Y)$ definícióval meghatározott K_0 (60) szerint meghatározza R_0-t. Egyszerű tény viszont, hogy $K_0 = 0$, és így $R_0 = 0$ szintén. □

Lokális komponensekben ez azt jelenti, hogy

$$R_{iklm} = \kappa(g_{ik}g_{lm} - g_{il}g_{km}).$$

Ebből azonnal látszik, hogy mindössze négy komponens nem nulla, azok, amelyekben a két középső index nem egyenlő és a két szélső index nem egyenlő, de ez a négy komponens is előjeltől eltekintve ugyanaz:

$$R_{1122} = R_{2211} = -R_{1212} = -R_{2121},$$

és

$$\kappa = \frac{R_{1122}}{\det g_{..}}. \tag{64}$$

21.6. Példák

A következőkben egy olyan V affin tér részsokaságait tekintjük, amely alatti **V** vektortéren adott egy $\langle\ ,\ \rangle$ pszeudo-euklideszi szerkezet.

21.6.1. Általános formulák

Ha a V affin térben levő M részsokaságnak $p : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathrm{V}$ egy paraméterezése, akkor $(U,u) := (\mathrm{Ran}p, p^{-1})$ a sokaság egy térképe. A paraméterezés parciális deriváltjai az affin tér alatti **V** vektortérben a sokaság érintőtereinek elemei, pontosabban

$$\partial_k p(p^{-1}(x)) = \frac{\partial}{\partial u^k}(x),$$

amint azt a 11.3 alfejezeteben megmutattuk.

Az M részsokaság akkor és csak akkor pszeudo-Riemann-sokaság, ha minden pontjában $\langle\ ,\ \rangle$ leszűkítése az érintőtérre nem elfajuló. Ebben az esetben a g metrikus tenzort

$$g(x) := \langle\ ,\ \rangle|_{T_x(M)\times T_x(M)} \qquad (x \in M)$$

adja meg.

Ha $\langle\ ,\ \rangle$ euklideszi szerkezet (skaláris szorzás), akkor minden részsokaság Riemann-sokaság.

Ha $p : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathrm{V}$ a részsokaság egy paraméterezése, akkor a metrikus tenzor komponensei a megfelelő térképben

$$g_{ik}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}(x), \frac{\partial}{\partial u^k}(x)\right)) = \langle \partial_i p(p^{-1}(x)), \partial_k p(p^{-1}(x))\rangle.$$

A paraméterezés használatával egyszerűbb a koordinátázott alakokat venni; így a metrikus tenzorra

$$\hat{g}_{ik}(\xi) = \langle \partial_i p(\xi), \partial_k p(\xi)\rangle \qquad (\xi \in \mathrm{Dom}p \subset \mathbb{R}^m).$$

21.6.2. Egy dimenziós részsokaságok

Egy dimenziós részsokaság (görbe) esetén egy $p : \mathbb{R} \to \mathrm{V}$ paraméterezéssel a koordinátázott metrikus tenzor

$$\hat{g}(\xi) = \langle \dot{p}(\xi), \dot{p}(\xi) \rangle \qquad (\xi \in \mathrm{Dom} p \subset \mathbb{R}),$$

feltéve persze, hogy a jobb oldalon álló kifejezés seholsem nulla. Ennek inverze

$$\hat{g}^{-1} = \frac{1}{\hat{g}}.$$

A kanonikus térfogati forma

$$\sqrt{|\det \hat{g}|} = \sqrt{|\langle \dot{p}, \dot{p} \rangle|},$$

amelyet persze itt hosszúsági formának nevezhetünk inkább:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{|\langle \dot{p}(\xi), \dot{p}(\xi) \rangle|} d\xi$$

a görbe $p(\xi_1)$ és $p(\xi_2)$ pontjai közötti szakaszának a pszeudo-hossza.

A koordinátázott Christoffel-szimbólum (59) szerint

$$\hat{\Gamma} = \frac{\langle \dot{p}, \ddot{p} \rangle}{\langle \dot{p}, \dot{p} \rangle} \ .$$

Tekintsük például $\mathbb{R}^2$-ben az

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \tag{65}$$

halmazt (a szokásos egységkört), amely egy dimenziós részsokaság.

Paraméterezhetjük a „felső félkört” úgy, hogy

$$p(\xi) := \left(\xi, \sqrt{1 - \xi^2}\right) \qquad (-1 < \xi < 1);$$

ekkor

$$\dot{p}(\xi) = \left(1, \frac{-\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right), \qquad \ddot{p}(\xi) = \left(0, \frac{-1}{(1 - \xi^2)^{3/2}}\right).$$

Egy másik lehetőséggel egy pontot kivéve a teljes kört paraméterezzük úgy, hogy:

$$p(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad (-\pi < \varphi < \pi);$$

ekkor

$$\dot{p}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \qquad \ddot{p}(\varphi) = (-\cos\varphi, -\sin\varphi).$$

Skaláris szorzat Vegyük $\mathbb{R}^2$-n a szokásos $\langle\ \ \rangle$ skaláris szorzatot; erre nézve az egységkör Riemann-sokaság.

Az első paraméterezésben

$$\langle \dot p(\xi), \dot p(\xi)\rangle = 1 + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} = \frac{1}{1-\xi^2}, \qquad \langle \dot p(\xi), \ddot p(\xi)\rangle = \frac{\xi}{(1-\xi^2)^2}$$

ezért

$$\hat g(\xi) = \frac{1}{1-\xi^2}, \qquad \hat g^{-1}(\xi) = 1-\xi^2,$$

$$\hat\Gamma(\xi) = \frac{\xi}{1-\xi^2}.$$

A második paraméterezésben

$$\langle \dot p(\varphi), \dot p(\varphi)\rangle = 1 \qquad \langle \dot p(\varphi), \ddot p(\varphi)\rangle = 0,$$

ezért

$$\hat g(\varphi) = 1, \qquad \hat g^{-1}(\varphi) = 1,$$

$$\hat\Gamma = 0.$$

Látható, mennyivel egyszerűbbek a koordinátázott alakok ezzel a paraméterezéssel, mint az előzővel.

Lorentz-szorzat Vegyük most $\mathbb{R}^2$-n az $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{y}\rangle := -x_1y_1 + x_2y_2$ pszeudo-euklideszi struktúrát. Erre nézve az egységkör nem lesz pszeudo-Riemann-sokaság. Ugyanis a $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ koordinátájú pontokban az érintővektorok „Lorentz-hossza” nulla. Ezeket a pontokat kihagyva négy körszeletet kapunk, amelyek már összefüggő pszeudo-Riemann-sokaságok, sőt Riemann-sokaságok.

Tekintsük a „felső körnegyedet”. Ennek úgy kapjuk paraméterezéseit, hogy leszűkítjük az előző paraméterezéseket a $-\frac{1}{\sqrt2} < \xi < \frac{1}{\sqrt2}$, illetve a $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ intervallumra.

Az első paraméterezésben

$$\langle \dot p(\xi), \dot p(\xi)\rangle = -1 + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} = \frac{-1+2\xi^2}{1-\xi^2}, \qquad \langle \dot p(\xi), \ddot p(\xi)\rangle = \frac{\xi}{(1-\xi^2)^2},$$

ezért

$$\hat g(\xi) = \frac{-1+2\xi^2}{1-\xi^2}, \qquad \hat g^{-1}(\xi) = \frac{1-\xi^2}{-1+2\xi^2},$$

$$\hat\Gamma(\xi) = \frac{\xi}{(1-\xi^2)(-1+2\xi^2)}.$$

A második paraméterezésben

$$\langle \dot p(\varphi), \dot p(\varphi)\rangle = -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \cos 2\varphi,$$

$$\langle \dot p(\varphi), \ddot p(\varphi)\rangle = -2\cos\varphi\sin\varphi = -\sin 2\varphi,$$

ezért

$$\hat{g}(\varphi) = \cos 2\varphi, \qquad \hat{g}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{\cos 2\varphi},$$

$$\hat{\Gamma}(\varphi) = \frac{-\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\tan 2\varphi.$$

21.6.3. Hiperbola vonal

Megvizsgálhatjuk ezután az

$$\{(x_1, x_2) \mid -x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$$

hiperbola-ágat is, amelyet paraméterezhetünk így:

$$p(\xi) := \left(\xi, \sqrt{1+\xi^2}\right) \qquad (\xi \in \mathbb{R}),$$

és így is:

$$p(\eta) := (\sinh \eta, \cosh \eta), \qquad (\eta \in \mathbb{R}).$$

Jó gyakorlat az olvasónak, ha származtatja ezekben a paraméterezésekben a metrikus tenzort és a Christoffel-szimbólumot mind a szokásos skaláris szorzatra, mind a Lorentz-szorzásra vonatkozóan.

21.6.4. Gömbhéj

Tekintsük $\mathbb{R}^{m+1}$-et és rajta a szokásos $\langle\ \ \rangle$ skaláris szorzatot.

Az

$$\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$$

halmaz m dimenziós részsokaság, amelynek „felét” így paraméterezhetjük:

$$p(\xi) := (\xi_1, \ldots, \xi_m, \sqrt{1-|\xi|^2}), \qquad \xi \in \mathbb{R}^m, |\xi| < 1,$$

ahol $|\ |$ a szokásos norma (hossz) $\mathbb{R}^m$-en.

Ekkor

$$\partial_1 p(\xi) = \left(1, 0, \ldots, 0, \frac{-\xi_1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\right),$$

$$\partial_i p(\xi) = \left(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \frac{-\xi_i}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\right),$$

ahol az 1 az i-ik helyen áll. Következésképpen

$$\hat{g}_{ik}(\xi) = \langle \partial_i p(\xi), \partial_k p(\xi)\rangle = \delta_{ik} + \frac{\xi_i \xi_k}{1-|\xi|^2},$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$\hat{g}^{ik}(\xi) = \delta^{ik} - \xi^i \xi^k,$$

ahol a felül indexezett koordináták ugyannazok, mint az alul indexezettek: $\xi^i\xi^k = \xi_i\xi_k$.

A szemléletesség kedvéért felírjuk a koordinátázott metrikus tenzort mátrixalakban is:

$$\hat{g}(\xi) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\xi_1\xi_1}{1-|\xi|^2} & \frac{\xi_1\xi_2}{1-|\xi|^2} & \cdots & \frac{\xi_1\xi_m}{1-|\xi|^2} \\ \frac{\xi_2\xi_1}{1-|\xi|^2} & 1+\frac{\xi_2\xi_2}{1-|\xi|^2} & \cdots & \frac{\xi_2\xi_m}{1-|\xi|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\xi_m\xi_1}{1-|\xi|^2} & \frac{\xi_m\xi_2}{1-|\xi|^2} & \cdots & 1+\frac{\xi_m\xi_m}{1-|\xi|^2} \end{pmatrix}.$$

Ezekből

$$\partial_j \hat{g}_{ik}(\xi) = \frac{\delta_{ji}\xi_k + \delta_{jk}\xi_i}{1-|\xi|^2} + 2\frac{\xi_j\xi_i\xi_k}{(1-|\xi|^2)^2},$$

és

$$\hat{\Gamma}_{ijk}(\xi) = \frac{\xi_i\delta_{jk}}{1-|\xi|^2} + \frac{\xi_j\xi_i\xi_k}{(1-|\xi|^2)^2}.$$

Külön vizsgáljuk meg az egységgömbhéjat $\mathbb{R}^3$-ban, amelynek az azimut- és polárszöggel való paraméterezése

$$p(\vartheta,\varphi) := (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\varphi), \quad (0<\vartheta<\pi, -\pi<\varphi<\pi).$$

A Föld felületével szemléltetve, ennek a paraméterezésnek az értékkészlete egy az északi sarktól a déli sarkig húzott fél főkörívet (a dátumválasztó vonalat) kivéve az egész felület.

Ekkor– szokásosan a paraméterek jelével indexezve számok helyett –

$$\partial_\vartheta p(\vartheta,\varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\varphi),$$

$$\partial_\varphi p(\vartheta,\varphi) = (-\sin\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, 0).$$

ezért

$$\hat{g}_{\vartheta\vartheta}(\vartheta,\varphi) = 1, \quad \hat{g}_{\varphi\varphi}(\vartheta,\varphi) = \sin^2\vartheta, \quad \hat{g}_{\vartheta\varphi} = 0,$$

amiből

$$\hat{g}^{\vartheta\vartheta}(\vartheta,\varphi) = 1, \quad \hat{g}^{\varphi\varphi}(\vartheta,\varphi) = \sin^2\vartheta, \quad \hat{g}^{\vartheta\varphi} = 0.$$

Mátrixalakban:

$$\hat{g}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}^{-1}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Továbbá

$$\partial_\vartheta \hat{g}_{\varphi\varphi}(\vartheta,\varphi) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

és minden más parciális derivált nulla.

Ezért

$$\hat{\Gamma}^{\vartheta}_{\varphi\varphi}(\vartheta,\varphi) = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \hat{\Gamma}^{\varphi}_{\vartheta\varphi}(\vartheta,\varphi) = \hat{\Gamma}^{\varphi}_{\varphi\vartheta}(\vartheta,\varphi) = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{66}$$

az összes többi komponens nulla.

Vizsgáljuk meg a párhuzamos eltolást adott ϑ_0 esetén a $p(\varphi) := (\vartheta_0, \varphi)$ paraméterezéssel megadott görbe mentén! Az $a := \cos\vartheta_0$, $b := \sin\vartheta_0$ jelöléssel az L párhuzamos vektormezőt a

$$(\hat{L}^1)^{\cdot} = ab\hat{L}^2, \qquad (\hat{L}^2)^{\cdot} = -\frac{a}{b}L^1$$

differenciálegyenlet írja le. Ennek megoldása

$$\hat{L}^1(\varphi) = b\big(c_1\cos(a\varphi) - c_2\sin(a\varphi)\big), \qquad \hat{L}^2(\varphi) = c_1\sin(a\varphi) + c_2\cos(a\varphi).$$

Szemléltessük a gömbhéjat a Föld felületével! A szóban forgó görbe egy szélességi kör. Induljunk el rajta Greenwich hosszúsági körétől ($\varphi = 0$) úgy, hogy kezdetben a vektor mutasson dél felé ($c_2 = 0, c_1 > 0$). c_1-et vehetjük 1-nek. Kelet felé haladva a vektor elfordul úgy, hogy a keletre néző komponense egyre nagyobb. Nyugat felé haladva meg úgy fordul el, hogy a nyugatra néző komponense növekszik. Amikor $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\cos\vartheta_0}$, akkor a vektor keletre, illetve nyugatra néz. Amikor kelet felé, illetve nyugat felé a dátumválasztó vonalhoz érünk, a vektor

$$(b\cos(a\pi), \sin(a\pi) \quad \text{illetve} \quad (b\cos(a\pi), -\sin(a\pi).$$

Ezek csak akkor egyeznek meg, ha $a = 1$, azaz $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, más szóval az egyenlítő mentén.

A gömbhéjon a geodetikusok egyenlete

$$\ddot{p}^1 = \sin p^1 \cos p^1 (\dot{p}^2)^2, \qquad \ddot{p}^2 = -\frac{\cos p^1}{\sin p^1}\dot{p}^1\dot{p}^2.$$

Megoldásai a $t \mapsto p(t) = (t, c)$ függvények, ahol c állandó. Ezek a hosszúsági körök paraméterezései. Minthogy bármely pontot választhatjuk az északi sark szerepére a Földfelületet szögekkel való paraméterezéséhez, a főkörök is geodetikusok. És csak ezek, mert minden ponton minden irányban halad át főkör.

21.6.5. A teljes tér koordinátázása

A V affin tér legegyszerűbb koordinátázásai az affin koordinátázások, amelyek jól ismertek lineáris algebrából. Ilyeneket az affin tér egy o elemével („origóval") és a $\mathbf{V}$ egy $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ bázisával adunk meg a

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathrm{V}, \qquad (\xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto o + \sum_{k=1}^{n} \xi^k \boldsymbol{e}_k$$

paraméterezés által.

Ekkor az $(U, u) := (\mathrm{V}, p^{-1})$ egyetlen térkép atlaszt alkot.

Az érintőtér, mint tudjuk, minden pontban $\mathbf{V}$, és most

$$\frac{\partial}{\partial u^k} = \boldsymbol{e}_k, \qquad du^k = \boldsymbol{f}^k,$$

ahol $\boldsymbol{f}^1, \dots, \boldsymbol{f}^n$ az adott bázis duálisa.

Mint tudjuk, a pszzeudo-euklideszi szerkezezet segítségével $\mathbf{V}^*$ azonosítható $\mathbf{V}$-vel, tehát a duális bázis elemeit is $\mathbf{V}$ elemeinek foghatjuk fel, és így

$$\langle \mathbf{f}_i, \boldsymbol{e}_k \rangle = \delta_i^k.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{f}^i = \sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{f}^k \rangle \boldsymbol{e}_k, \qquad \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{f}^k.$$

A metrikus tenzor – vagyis a pszeudoeuklideszi szerkezet – koordinátázott alakja

$$\hat{g}_{ik} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \rangle,$$

és előző formulák alapján

$$\hat{g}^{ik} = \langle \boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{f}^k \rangle.$$

Legegyszerűbbek azok az affin koordinátázások, amelyekben a szóban forgó bázis pszeudo-ortonnormált (lásd 3). Ekkor a metrikus tenzor koordinátázott alakja diagonális, és az átlóban ± 1 szerepel.

Bizonyos feladatok megoldásához olykor célszerű egy affin tér nem-affin, úgynevezett görbevonalú koordinátázása. A következő pontban tárgyalunk ilyeneket.

21.6.6. Polár- és gömbkoordinátázás

Fizikai terünket a legegyszerűbb körülmények között egy három dimenziós euklideszi affin térrel modellezzük. Most szemügyre vesszük a terünkben egy sík, illetve az egész tér egy-egy szokásos „görbevonalú" koordinátázását.

Ezt álltalában úgy tesszük meg, hogy a sík, illetve a terünk egy ortonormált koordinátázását komponáljuk $\mathbb{R}^2$, illetve $\mathbb{R}^3$ görbevonalú koordinátázásával.

Polárkoordinátázás $\mathbb{R}^2$ polárkoordinátázását a

$$p : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2, \qquad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

paraméterezés adja meg, amelynek értékkészlete $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})$.

Ekkor – ismét a koordináták jelével indexelve számok helyett –

$$\partial_r p(r, \varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \partial_\varphi p(r, \varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi).$$

Következésképpen

$$\hat{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}^{-1}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Továbbá

$$\partial_r \hat{g}_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 2r,$$

az összzes többi parciális derivált nulla, így

$$\hat{\Gamma}^r_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = -r, \qquad \hat{\Gamma}^\varphi_{r\varphi}(r,\varphi) = \hat{\Gamma}^\varphi_{\varphi r}(r,\varphi) = \frac{1}{r},$$

az összes többi komponens nulla.

Tekintsünk most egy mozgást a síkon, amelyet polárkoordinátákban egy időintervallumon értelmezett $t \mapsto (r(t), \varphi(t)$ függvény ír le.

Mint tudjuk, a sebesség koordinátái

$$v_r := \dot{r}, \qquad v_\varphi := \dot{\varphi}.$$

A gyorsulás koordinátái (53) szerint

$$a_r := \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2, \qquad a_\varphi := \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}.$$

A sebesség, illetve a gyorsulás nagysága (67) alapján $\sqrt{v_r^2 + r^2 v_\varphi^2}$, illetve $\sqrt{a_r^2 + r^2 a_\varphi^2}$.

Megjegyzendő, fizikakönyvekben a sebesség, illetve a gyorsulás polárkoordinátáira

$$(\dot{r}, r\dot{\varphi}), \quad \text{illetve} \quad (\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2, r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$$

használatos. A különbség azért van, mert mi itt az (r,φ) koordinátájú pontban az érintőtérben az általános formuláknak megfelelő $\frac{\partial}{\partial r}$ és $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ bázisvektorokat vettük, a fizikában pedig a $\frac{\partial}{\partial r}$ és $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ bázisvektorokat tekintik, mert ezek egységnyi hosszúak az adott skaláris szorzatra vonatkozóan.

Gömbkoordinátázás $\mathbb{R}^3$ gömbkoordinátázását a

$$p : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^3, \qquad (r,\vartheta,\varphi) \mapsto (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

paraméterezés adja meg, amelynek értékkészlete $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Ekkor – ismét a koordináták jelével indexelve számok helyett –

$$\begin{aligned}
\partial_r p &= (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta),\\
\partial_\vartheta p &= (r\cos\varphi\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, -r\sin\vartheta),\\
\partial_\varphi p &= (-r\sin\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\cos\varphi, 0).
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\hat{g}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}^{-1}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Továbbá

$$\partial_r \hat{g}_{\vartheta\vartheta} = 2r, \qquad \partial_r \hat{g}_{\varphi\varphi} = 2r\sin^2\vartheta, \qquad \partial_\vartheta \hat{g}_{\varphi\varphi} = 2r^2\cos\vartheta\sin\vartheta,$$

az összes többi parciális derivált nulla. Ezért

$$\hat{\Gamma}^r_{\vartheta\vartheta} = -r, \qquad \hat{\Gamma}^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\vartheta,$$

$$\hat{\Gamma}^\vartheta r\vartheta = \hat{\Gamma}^\vartheta_{\vartheta r} = \frac{1}{r}, \qquad \hat{\Gamma}^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\hat{\Gamma}^\varphi_{r\varphi} = \hat{\Gamma}^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \hat{\Gamma}^\varphi_{\vartheta\varphi} = \hat{\Gamma}^\varphi_{\varphi\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

a többi komponens nulla.

Tekintsünk most egy mozgást a térben, amelyet gömbkoordinátákban egy időintervallumon értelmezett $t \mapsto (r(t), \vartheta(t), \varphi(t)$ függvény ír le.

Mint tudjuk, a sebesség koordinátái

$$v_r := \dot{r}, \qquad v_\vartheta = \dot{\vartheta}, \qquad v_\varphi := \dot{\varphi}.$$

A gyorsulás koordinátái (53) szerint

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\vartheta})^2 - r\sin^2\vartheta(\varphi)^2, \\
a_\vartheta &= \ddot{\vartheta} + \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} - \sin\vartheta\cos\vartheta(\dot{\varphi})^2, \\
a_\varphi &= \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + \frac{2\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\dot{\vartheta}\dot{\varphi}.
\end{aligned}$$

A sebesség nagysága (68) alapján $\sqrt{v_r^2 + r^2 v_\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta v_\varphi^2}$, és hasonló képlet érvényes a gyorsulás nagyságára is.

Itt is érdemes felfigyelni arra, hogy fizikakönyvekben az egységnyi érintővektorok használata miatt a sebesség gömbkoordinátáira

$$(\dot{r}, r\dot{\vartheta}, r\sin\vartheta\dot{\varphi})$$

használatos, és a gyorsulás gömbkoordinátáira (amelyek levezetését sokszor mellőzik, mert az egyszerű fizikai meggondolások nem vezetnek eredményre).

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\vartheta})^2 - r\sin^2\vartheta(\varphi)^2, \\
a_\vartheta &= r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\cos\vartheta(\dot{\varphi})^2, \\
a_\varphi &= r\sin\vartheta\ddot{\varphi} + 2\sin\vartheta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}.
\end{aligned}$$

21.7. Görbület euklideszi térben

Euklideszi tér egy dimenziós részsokaságainak – görbéknek – szokás értelmezni a görbületét és torzióját. Ez az eddig itt tárgyalt fogalmakkal nem hozható kapcsolatba, hiszen az egy dimenziós sokaságok görbülete nulla, és a torzió minden pszeudo-Riemann-sokaságon elve nulla.

Három dimenziós euklideszi tér két dimenziós részsokaságainak – felületeknek – több féle görbületét szokás értelmezni. Ezek közül az egyik a Gauss-féle görbület. Megmutatható, hogy ez lényegében az itt tárgyalt görbülettel egyezik meg. Erről mondunk egy kicsit többet.

Legyen p a felület egy paraméterezése. A Gauss-féle **első főmennyiségek** a metrikus tenzor komponensei, a szokásos jelöléssel:

$$E := \langle \partial_1 p, \partial_1 p\rangle = \hat{g}_{11}, \quad F := \langle \partial_1 p, \partial_2 p\rangle = \hat{g}_{12}, \quad G := \langle \partial_2 p, \partial_2 p\rangle = \hat{g}_{22}.$$

A felület

$$n := \frac{\partial_1 p \times \partial_2 p}{|\partial_1 p \times \partial_2 p|}$$

normálvektorával ($\times$ a vektoriális szorzást jelöli) a Gauss-féle **második főmennyiségek**

$$L := \langle \partial_1\partial_1 p, n\rangle, \quad M := \langle \partial_1\partial_2 p, n\rangle, \quad N := \langle \partial_2\partial_2 p, n\rangle.$$

Ezekkel a **Gauss-féle görbület** – itt eltérünk a szokásos jelöléstől –

$$\kappa := \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Világos, hogy a nevezőben álló mennyiség éppen $\det g_{\cdot\cdot}$. Visszalapozva (64)-hoz, ha megmutatjuk, hogy az itteni számláló megegyezik az ottanival, akkor megkapjuk az általánosan bevezetett görbület és a Gauss-görbület kapcsolatát.

$LN - M^2$ a paraméterezés első rendű és másod rendű deriváltjainak különféle szorataiból állítható elő.

R_{1122}-ről (47) és (59) szerint ugyanez mondható. Hosszadalmas számolások után meg is mutatható, hogy a szóban forgó két mennyiség megegyezik.

Általánosságban nem követjük végig ezt az utat, csak egy egyszerű speciális esetben, a két dimenziós gömbhéjra az azimut- és polárszöggel való paraméterezésben. Ekkor

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1 p(\vartheta,\varphi) &= (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, -\cos\vartheta),\\
\partial_1\partial_2 p(\vartheta,\varphi) &= (-\cos\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0),\\
\partial_2\partial_2 p(\vartheta,\varphi) &= (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, 0).
\end{aligned}$$

Itt a normálvektor épp a rádiuszvektor, azaz

$$n(\vartheta,\varphi) = p(\vartheta,\varphi),$$

ezért

$$\begin{aligned}
L(\vartheta,\varphi) &= -\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi - \cos^2\vartheta = -1,\\
M(\vartheta,\varphi) &= -\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi = 0,\\
N(\vartheta,\varphi) &= -\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi = -\sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

Tehát

$$(LN - M^2)(\vartheta,\varphi) = \sin^2\vartheta.$$

Másrészt (47) alapján

$$\hat{R}^1_{122} = \partial_1 \hat{\Gamma}^1_{22} - \hat{\Gamma}^1_{22}\hat{\Gamma}^2_{12},$$

és lévén $\hat{R}_{1122} = \hat{g}_{1k}\hat{R}^k_{122} = \hat{R}^1_{122}$, végül arra jutunk (66) szerint, hogy

$$\hat{R}_{1122}(\vartheta, \varphi) = (-\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta.$$

21.8. Gravitációelmélet

Csillgászati mefigyelések arra utaltak, hogy kozmikus méretekben a Newton-féle gravitációelmélet nem kielégítő. Ennek hatására született meg az Einstein-féle gravitációelmélet, amelyet történelmi okokból, sajnos félrevezetően, általános relativitáselméletnek szokás nevezni.

Az új elmélet alapgondolata durván a következő. Az anyagi objektumok gravitációs hatása abban áll, hogy „meggörbítik" a téridőt (a tér és idő szerves egységét), és ezzel más anyagi objektumokat arra kényszerítenek, hogy a görbült téridő geodetikusai mentén mozogjanak.

Egy kicsit közelebbről:

- a téridő egy M négy dimenziós differenciálható sokaság,
- a téridőben létező anyag eloszlását egy T $(1,1)$ típusú tenzormezővel (az úgynevezett energia-impulzus tenzorral) lehet leírni,
- az anyageloszlás által létrehozott gravitációs hatást egy g Lorentz-típusú metrikus tenzor jellemzi, amelyre az $\overline{R}$ Ricci-tenzorral és egy γ úgynevezett gravitációs állandóval az

$$\overline{R} = 8\pi\gamma\left(g \cdot T - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}T)g\right)$$

összefüggés, a **gravitációs egyenlet** áll fenn.

$g \cdot T$ a két tenzor kontrakcióját jelöli, amelyet $g \cdot (X \otimes a) := g(X, \cdot) \otimes a$ határoz meg tetszőleges X vektormezővel és a kovektormezővel.

Lokális komponensekben

$$\overline{R}_{ik} = 8\pi\gamma\left(g_{ij}T^j_k - \frac{1}{2}T^j_j g_{ik}\right).$$

Mivel a görbület lokális komponensei a Christoffel-szimbólumokkal és azok parciális deriváltjaival adhatók meg (lásd (47)), a Christoffel-szimbólumok pedig a metrikus tenzor komponenseivel és azok parciális deriváltjaival (lásd (59)), a gravitációs egyenlet igen bonyolult másod rendű parciális differenciálegyenlet-rendszer a metrikus tenzor komponenseire.